

 IEAN

© fotopro

# Berechnung elektrischer Energienetze

Stefan Polster  
Herwig Renner

Oktober 2017

 EWA

## Formelzeichen und Einheiten

Für das gesamte Skriptum wird folgende Notation verwendet:

- Komplexe Größen werden unterstrichen geschrieben  $\underline{X}$
- Vektoren als fett geschriebene Kleinbuchstaben  $\mathbf{x}$
- Matrizen als fett geschriebene Großbuchstaben  $\mathbf{X}$
- Der Index  $d$  bei Matrizen markiert Diagonalmatrizen

Verwendung von Indizes für Knoten und Zweige:

- Indizes beziehen sich auf den zugehörigen Knoten
- Zweige werden mit zwei Indizes bezeichnet, wobei diese sich auf die verbundenen Knoten beziehen. Zählrichtung ist vom ersten Index zum zweiten

Alle Größen werden, falls nicht anders angegeben, im Per-Unit-System angegeben.

Es gilt für alle Berechnungen:

- Knotenleistungen und Knotenströme sind positiv für Erzeuger
- Knotenleistungen und Knotenströme sind negativ für Verbraucher

$\alpha$	Menge aller mit Knoten $i$ verbundener Knoten
$\Delta\alpha$	Winkeländerung pro Stufe (Phasenschiebertransformator)
$\beta$	Winkel der Spannungsänderung bei Regeltransformatoren
$\gamma$	Übertragungskonstante für Leitungselemente
$\delta$	Knotenspannungswinkel
$\varepsilon$	Schranke für Abbruchbedingung bei Iteration
$\lambda_P, \lambda_Q$	Parameter für Spannungsabhängigkeit von Lasten für P, Q
$v_i$	Menge aller mit Knoten $i$ verbundener Knoten
$\varphi$	Leistungswinkel
$\psi$	Leitungswinkel
$\omega$	Winkelfrequenz
$\Phi$	Knoten-verbleibende-Zweige-Inzidenzmatrix
$\Psi$	Knoten-ausgefallene-Zweige-Inzidenzmatrix
$\mathbf{A}$	Zweig-Knoten-Inzidenzmatrix
$\mathbf{B}$	Suszeptanzmatrix
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix

<b>H</b>	Hybridmatrix
<b>KZI</b>	Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix
<b>K</b>	Inverse Kettenmatrix
<b>LODF</b>	Line Outage Distribution Factor Matrix
<b>PSDF</b>	Phase Shift Distribution Factor Matrix
<b>PTDF</b>	Power Transfer Distribution Factor Matrix
<b>Y</b>	Admittanzmatrix
<b>Z</b>	Impedanzmatrix
<b>C'</b>	Kapazitätsbelag
<b>f</b>	Frequenz
<b>G'</b>	Leitwertbelag
<b>I</b>	Strom
<b>I<sub>b</sub></b>	Bezugsstrom für Per-Unit-System
<b>K<sub>P</sub>, K<sub>Q</sub></b>	Parameter für Frequenzabhängigkeit von Lasten für P, Q
<b>l</b>	Leitungslänge
<b>L'</b>	Induktivitätsbelag
<b>P</b>	Wirkleistung
<b>P<sub>0</sub></b>	Eisen-, Leerlaufverluste
<b>P<sub>k</sub></b>	Kupferverluste
<b>P<sub>L</sub></b>	Über einen Zweig übertragene Wirkleistung
<b>Q</b>	Blindleistung
<b>R</b>	Wirkwiderstand
<b>R'</b>	Wirkwiderstandsbelag
<b>R<sub>m</sub></b>	Eisenverlustwiderstand
<b>S</b>	Scheinleistung
<b>S<sub>b</sub></b>	Bezugsscheinleistung für Per-Unit-System
<b>S<sub>nat</sub></b>	Natürliche Leistung eines Leitungselements

$t_{\min}, t_{\max}, t$	minimale, maximale, aktuelle Schaltstufe von Regeltransformatoren
$U$	Spannung
$U_b$	Bezugsspannung für Per-Unit-System
$\Delta u$	Spannungsänderung pro Stufe bei Regeltransformatoren
$X$	Reaktanz
$X_m$	Magnetisierungsreaktanz
$Y$	Admittanz
$Z$	Impedanz
$Z_b$	Bezugsimpedanz für Per-Unit-System
$Z_{KS}$	Kurzschlussimpedanz
$Z_L$	Lastimpedanz
$Z_T$	Ersatzimpedanz für Transformatoren
$Z_w$	Wellenwiderstand

## Table of Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1	Per-Unit-System .....	1
<b>2</b>	<b>Grundlegende Netzelemente.....</b>	<b>2</b>
2.1	Zweige .....	2
2.1.1	Leitungselemente .....	2
2.1.2	Transformator .....	5
2.2	Knotentypen.....	9
2.2.1	Einspeisungen .....	9
2.2.2	Lasten .....	10
<b>3</b>	<b>Allgemeine Lastflussrechnung.....</b>	<b>12</b>
3.1	Systemmatrizen: Strom/Spannungszusammenhänge .....	12
3.2	Lineare und nichtlineare Problemstellungen .....	15
3.2.1	Lineare Problemstellungen, I- und Z-Knoten.....	15
3.2.2	Iterationsverfahren.....	16
3.2.3	Funktionalmatrizenverfahren .....	17
3.3	Netzreduktion.....	19
<b>4</b>	<b>DC-Lastfluss .....</b>	<b>21</b>
4.1	Grundlegende DC-Lastflussgleichungen - PTDF .....	22
4.2	Phasenschiebertransformatoren im DC-Lastfluss - PSDF .....	24
4.3	Auswirkung von Zweigausfällen im DC-Lastfluss – LODF .....	25
4.4	Abschätzung der Genauigkeit .....	26
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>28</b>



# 1 Einleitung

Die Berechnung von Lastflüssen ist ein wesentlicher Bestandteil bei der Planung und Betriebsführung von elektrischen Energienetzen. Die grundlegenden Aufgaben einer Lastflussberechnung sind die Ermittlung der Strom- und Spannungsverhältnisse, sowie die resultierenden Leistungsflüsse über einzelne Betriebsmittel bei einer spezifischen Erzeugungs- und Verbrauchssituation. Mit Hilfe dieser Ergebnisse können eventuelle Grenzwertverletzungen und kritische Lastsituationen erkannt werden und mit geeigneten Gegenmaßnahmen entschärft werden.

Im Folgenden werden die theoretischen Überlegungen von statischen Lastflussberechnungen näher behandelt. Es wird dabei besonderes Augenmerk auf die prinzipiellen Zusammenhänge gelegt, da diese auch bei komplexen Lastflussprogrammen das Grundgerüst der Berechnungen bilden.

## 1.1 Per-Unit-System

Die Berechnung des physikalischen Systems kann erheblich vereinfacht werden, wenn die physikalischen SI-Einheiten auf Bezugswerte referenziert werden. Die referenzierten Werte werden in per-unit (p.u.) angegeben und bilden das Per-Unit-System.

In der Energietechnik werden üblicherweise Spannung und Leistung als definierte Bezugsgrößen verwendet, wobei sich alle anderen notwendigen Bezugsgrößen auf sie zurückführen lassen.

*Spannungen* werden immer auf die Nennspannung  $U_b$  der Netzebene bezogen.

$$\underline{U}_{pu} = \frac{U}{U_b} \quad (1-1)$$

Die *Leistungen* werden im Allgemeinen auf eine Bezugsleistung  $S_b$  für das gesamte System bezogen. In der Energietechnik wird dafür meistens eine Drehstromleistung von 100 MVA gewählt.

$$P, Q, S_{pu} = \frac{P, Q, S}{S_b} \quad (1-2)$$

Aus der Bezugsspannung und der Bezugsleistung kann der Bezugsstrom  $I_b$  für jede Netzebene berechnet werden.

$$I_{pu} = \frac{I}{I_b} = \frac{I}{\frac{S_b}{\sqrt{3} \cdot U_b}} \quad (1-3)$$

Die Bezugsimpedanz  $Z_b$  wird ebenfalls von der Bezugsleistung und Bezugsspannung definiert und für jede Netzebene einzeln berechnet. Die Umrechnung der Impedanzen zwischen Spannungsebenen entfällt für Per-Unit-Werte, da die Bezugsimpedanz quadratisch proportional zur Bezugsspannung ist (vgl. Multiplikation mit dem Quadrat der Übersetzung für SI-Einheiten).

$$\underline{Z}_{pu} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_b} = \frac{\underline{Z}}{\frac{\underline{U}_b}{\sqrt{3} \cdot I_b}} = \frac{\underline{Z}}{\frac{\underline{U}_b^2}{S_b}} \quad (1-4)$$

Für die Leistungsberechnung in Drehstromsystemen gilt im Per-Unit-System:

$$\underline{S} = \sqrt{3} \cdot \underline{U} \cdot \underline{I}^* \Rightarrow \underline{S}_{pu} = \underline{U}_{pu} \cdot \underline{I}_{pu}^* \quad (1-5)$$

$$P = 3 \cdot I^2 \cdot R \Rightarrow P_{pu} = I_{pu}^2 \cdot R_{pu} \quad (1-6)$$

Siehe auch [1].

## 2 Grundlegende Netzelemente

Es werden nur grundlegende Lastflussprobleme behandelt und die Integration von Elementen der Netzregelung, wie z.B. FACTS-Elemente, weitgehend nicht betrachtet. Für die Modellierung und Integration in die Lastflussberechnung wird an dieser Stelle an die Vorlesung „Regelung und Stabilität elektrischer Energiesysteme“ [1] bzw. auf [2], [3] verwiesen.

### 2.1 Zweige

In der Energietechnik versteht man unter Zweigen im Allgemeinen Übertragungselemente, wie Freileitungen, Kabel und Transformatoren, welche zwei Knoten miteinander verbinden. Die Zweige können über die entsprechenden Ersatzschaltungen der Übertragungselemente modelliert werden.

Eine Ausnahme sind Hochspannungsleichstromübertragungen (HGÜ), welche als Last bzw. Einspeisung in Knoten modelliert werden.

#### 2.1.1 Leitungselemente

Die Leitungselemente für die klassische Energieübertragung (AC-Netze) sind Freileitungen und Kabel. Sie können vereinfacht durch eine  $\pi$ -Ersatzschaltung mit konzentrierten Elementen im Mitsystem beschrieben werden, Abbildung 2-1. In der Literatur wird als Grenze für die Gültigkeit der  $\pi$ -Ersatzschaltung für Freileitungen eine mittlere Leitungslänge zwischen 80 km und 200 bis 300 km, bzw. Kabellängen bis 100 km, genannt. Bei längeren Leitungen ist eine Korrektur der Impedanzwerte notwendig oder es muss die Leitung als Reihenschaltung von mehreren  $\pi$ -Gliedern modelliert werden. Die Untergrenze bei kurzen Freileitungen ergibt sich aus der Möglichkeit den Kapazitätsbelag zu vernachlässigen, bei Kabeln ist das durch den bis zu 30-mal größeren Kapazitätsbelag auch bei kurzen Längen nicht möglich.



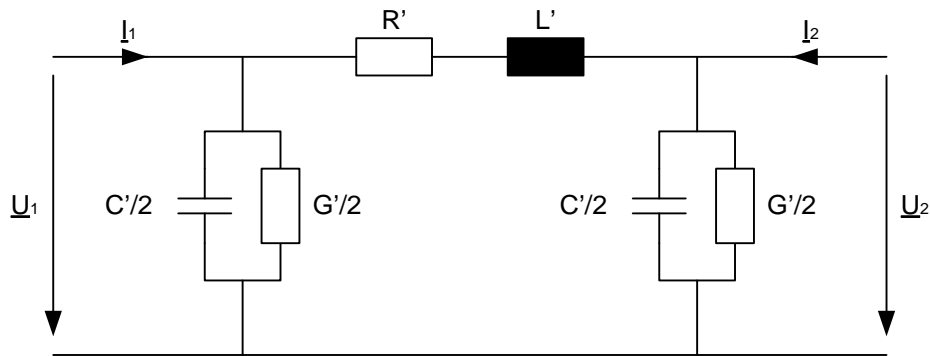


Abbildung 2-1 allgemeines vollständiges  $\pi$ -Ersatzschaltbild einer Leitung

$R'$	Widerstandsbelag
$L'$	Induktivitätsbelag
$C'$	Kapazitätsbelag
$G'$	Leitwertbelag

In der elektrischen Energietechnik kann der Leitwertbelag vernachlässigt werden, da die Isolation im fehlerfreien Betriebszustand als ideal angenommen werden kann. Zusätzlich können unter Umständen Höchstspannungsleitungen als verlustlos angenommen werden, wodurch der Wirkwiderstandsbelag vernachlässigt wird.

Die Längs- und Querimpedanzen des Leitungselements von Knoten 1 zu Knoten 2 für mittlere Leitungslängen berechnen sich wie in (2-1) und (2-2) gezeigt (Knoten 0 = Erde).

$$\underline{Z}_{12} = (R' + j\omega L') \cdot l \tag{2-1}$$

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20} = \frac{2}{j\omega C' \cdot l} \tag{2-2}$$

Die Impedanzen für lange Leitungen werden mit der Verwendung des Wellenwiderstandes  $Z_W$  und der Übertragungskonstanten  $\underline{\gamma}$  berechnet.

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_W \sinh(\underline{\gamma}l) \tag{2-3}$$

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20} = \frac{\underline{Z}_W}{\tanh\left(\frac{\underline{\gamma}l}{2}\right)} \tag{2-4}$$

$$\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tag{2-5}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \approx j\omega\sqrt{L'C'} \tag{2-6}$$

Die Admittanzmatrix für ein einzelnes Leitungselement ergibt sich zu:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{10}} & -\frac{1}{Z_{12}} \\ -\frac{1}{Z_{12}} & \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{20}} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

Weitere wichtige Leitungsparameter sind die thermische Grenzleistung  $S_{\text{therm}}$  und die natürliche Leistung  $S_{\text{nat}}$ .

**Def:** Die **thermische Grenzleistung** ist jene Leistung, welche über ein Leitungselement bei Nennspannung transportiert werden kann und zum Erreichen der maximal zulässigen Beharrungstemperatur führt.

**Def:** Die **natürliche Leistung** eines Leitungselementes ist jene transportierte Leistung, bei welcher von dem Leitungselement bei Nennspannung keine Blindleistung bezogen oder abgegeben wird.

$$S_{\text{nat}} = \frac{U^2}{Z_W} \quad (2-8)$$

Eine ausführlichere Ableitung kann in [2] gefunden werden.

Für die Berechnung von elektrischen Energienetzen spielt das Blindleistungsverhalten von Leitungselementen bei Wirkleistungsübertragung eine wichtige Rolle. Für eine einfache Abschätzung des Blindleistungsverhaltens wird die übertragene Wirkleistung mit der natürlichen Leistung des Leitungselements verglichen und es können bei Nennspannung die folgenden drei Betriebsfälle unterschieden werden:

Bei Belastung

- mit natürlicher Leistung ist die Blindleistungsbilanz ausgeglichen.
- mit unternatürlicher Leistung wirkt die Leitung als Blindleistungserzeuger.
- mit übernatürlicher Leistung wirkt die Leitung als Blindleistungsverbraucher.

Hochspannungskabel wirken immer als Blindleistungserzeuger, da ihre natürliche Leistung über der thermischen Grenzleistung liegt.

Der Betrieb mit natürlicher Leistung entspricht dem Optimum und wird sich im Allgemeinen nicht realisieren lassen und es muss zusätzliche Blindleistung durch Kraftwerke oder Kompensationseinrichtungen bereitgestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass Blindleistung nicht über weite Strecken transportiert werden kann.

[1], [2]

### 2.1.2 Transformator

Transformatoren verbinden die verschiedenen Spannungsebenen in elektrischen Netzen. Für die Berechnung der Ströme, Spannungen und Impedanzen ist es notwendig diese über das Nennübersetzungsverhältnis auf eine gemeinsame Bezugsspannung umzurechnen. Die durch Schaltgruppen verursachte Phasendrehung zwischen Ober- und Unterspannungsseite wird im Allgemeinen nicht berücksichtigt.

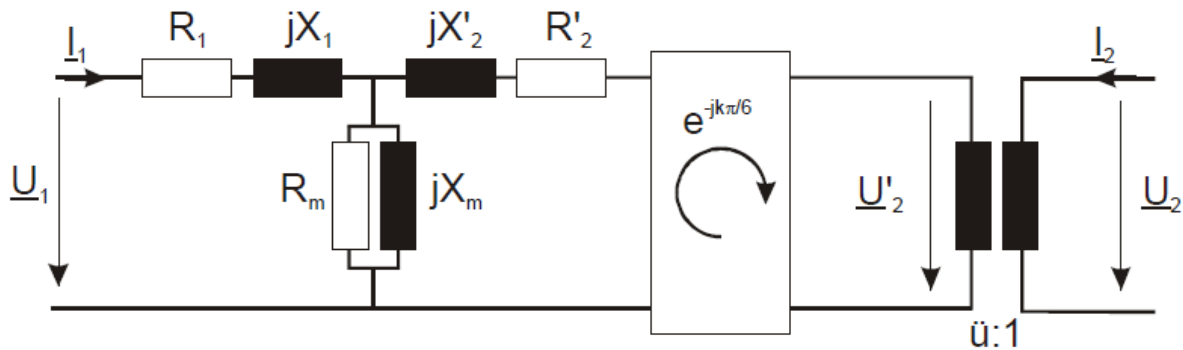


Abbildung 2-2 Vollständige Transformatorersatzschaltung, 'Größen auf Primärseite umgerechnet, [1]

$R_1, R_2'$	Wicklungswiderstände
$jX_1, jX_2'$	Streureaktanzen
$jX_m$	Magnetisierungsreaktanz
$R_m$	Eisenverlustwiderstand
$\ddot{u}$	Übersetzungsverhältnis
$k$	Schaltgruppe

Die Größen aus dem Ersatzschaltbild können aus den Kenndaten und der Verschaltung der Wicklungen bzw. aus den entsprechenden Kurzschluss- und Leerlaufversuchen ermittelt werden, siehe [4] für eine genaue Herleitung und Beschreibung.

$S_n$	Nennscheinleistung
$U_{n1}, U_{n2}$	primäre und sekundäre Nennspannung
$u_k$	relative Kurzschlussspannung
$P_k$	Kupfer-, Kurzschlussverluste
$P_0$	Eisen-, Leerlaufverluste

Für stationäre Berechnungen lässt sich das Ersatzschaltbild des Transformators stark vereinfachen. Neben dem Wegfall der Phasendrehung durch die Schaltgruppe, wird durch die Verwendung des Per-Unit-Systems das Übersetzungsverhältnis zu 1. Des Weiteren können, bei Vernachlässigung von Magnetisierungsimpedanz und Eisenverlusten bei belasteten Transformatoren, die

Wicklungswiderstände und Streureaktanzen der Primär- und Sekundärseite zu der Transformatorimpedanz  $Z_T$  zusammengefasst werden, Abbildung 2-3.

Können die Magnetisierungsimpedanz und die Eisenverluste in der Berechnung nicht vernachlässigt werden, ist es von Vorteil ein  $\pi$ -Ersatzschaltbild für den Transformator zu verwenden, wobei die Grundvoraussetzung erfüllt sein muss, dass die primär- und sekundärseitigen Serienimpedanzen im Per-Unit-System gleich groß sind bzw. als gleich groß angenommen werden können ( $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R_1 + jX_1$ ), [2]. Die Admittanzmatrix der Ersatzschaltung ergibt sich zu

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_{12}} + \frac{1}{\underline{Z}_{10}} & -\frac{1}{\underline{Z}_{12}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_{12}} & \frac{1}{\underline{Z}_{12}} + \frac{1}{\underline{Z}_{20}} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

mit

$$\underline{Z}_{12} = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2) \quad (2-10)$$

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20} = \frac{1}{2} \frac{jR_m X_m}{R_m + jX_m} \quad (2-11)$$

Eine gesonderte Betrachtung ist für Regeltransformatoren durchzuführen, da sie im Betrieb im Allgemeinen ein von dem Nennübersetzungsverhältnis abweichendes Übersetzungsverhältnis aufweisen, welches bei Schräg- und Querreglern, sowie Phasenschiebertransformatoren, komplexe Werte annimmt. Für eine Berechnung werden zusätzliche Kenndaten benötigt:

$t_{\min}, t_{\max}, t$	minimale, maximale, aktuelle Schaltstufe
$\Delta u$	Spannungsänderung pro Schaltstufe
$\beta$	Winkel der Spannungsänderung

Aus diesen Werten kann nun das komplexe Übersetzungsverhältnis  $\underline{c}_{\bar{u}}$  berechnet werden.

$$\underline{c}_{\bar{u}} = 1 + t \cdot \Delta u (\cos\beta + j\sin\beta) \quad (2-12)$$

Das vereinfachte Ersatzschaltbild für Regeltransformatoren ist in Abbildung 2-4 gezeigt und besteht aus einem idealen Transformator mit dem komplexen Übersetzungsverhältnis  $\underline{c}_{\bar{u}} : 1$  und der Transformatorlängsimpedanz.

$$\underline{Z}_T = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2) \quad (2-13)$$

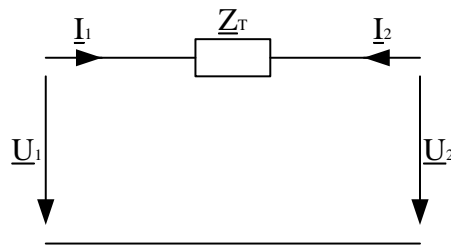


Abbildung 2-3 Vereinfachtes Ersatzschaltbild,  $c_{\underline{u}} = 1$

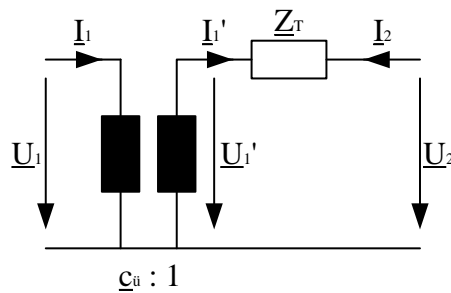


Abbildung 2-4 Vereinfachtes Ersatzschaltbild für Regeltransformator

Die resultierende Admittanzmatrix für Regeltransformatoren ist:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_{\underline{u}}^2 \cdot \underline{Z}_T} & -\frac{1}{c_{\underline{u}}^* \cdot \underline{Z}_T} \\ -\frac{1}{c_{\underline{u}} \cdot \underline{Z}_T} & \frac{1}{\underline{Z}_T} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

Eine Überführung der Regeltransformatoren in ein  $\pi$ -Ersatzschaltbild ist nur für Längsregler möglich, da nur für diese die notwendige Diagonalsymmetrie in  $Y$  gegeben ist.

Der Aufbau von Regeltransformatoren und die Herleitung des Übersetzungsverhältnisses und der Admittanzmatrix ist in [1] gegeben.

Sonderfälle von Regeltransformatoren sind Phasenschiebertransformatoren (PSTs), welche über eine Serienwicklung eine um  $90^\circ$  phasenverschobene Spannung  $\Delta u$  einspeisen. Die Aufteilung in einen Serien- und einen Erregertransformator bringt den erheblichen Vorteil, dass für die Bauleistung nur der Durchgangsstrom und die eingespeiste Spannung  $\Delta u$  ausschlaggebend sind. Im Folgenden wird das Übersetzungsverhältnis eines Phasenschiebertransformators mit symmetrischer 2-Kesselausführung genauer betrachtet, Abbildung 2-5.

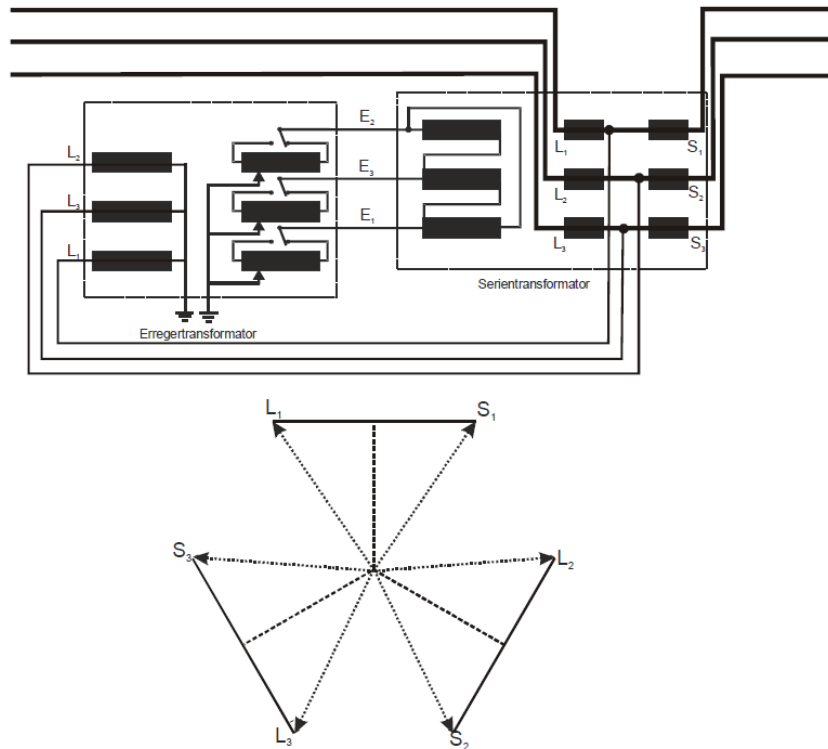


Abbildung 2-5, symmetrische 2-Kesselausführung mit getrenntem Erreger- und Serientransformator [1]

Die Implementierung dieses PST erfolgt wie auch bei den schon besprochenen Regeltransformatoren mit Hilfe des komplexen Übersetzungsverhältnisses. Für die Bestimmung dieses wird der PST als eine Back-to-Back-Anordnung von zwei gegengleichen Querregeltransformatoren modelliert. Das resultierende Übersetzungsverhältnis dieser Einheit hat eine Amplitude von 1 p.u. und eine von der Schalterstellung abhängige Winkeländerung.

$$\underline{c}_{\tilde{u}} = \frac{1 + j \cdot t \cdot \Delta u}{1 - j \cdot t \cdot \Delta u} = 1 \cdot e^{j \cdot \Delta \alpha \cdot t} \text{ mit } \frac{\Delta \alpha}{2} = \tan^{-1}(t \cdot \Delta u) \quad (2-15)$$

## 2.2 Knotentypen

Unter Knoten versteht man Verbindungspunkte von Leitungen und Anschlusspunkten von Einspeisungen und Lasten. Die Knoten lassen sich in unterschiedliche Knotentypen anhand der vorgegebenen Knotengrößen einteilen, Tabelle 2-1.

Tabelle 2-1

Knotentyp	Netzelement	Vorgabe	Berechnet
Slackknoten, Referenzknoten	Kraftwerk, Einspeisung aus übergeordnetem Netz	$\underline{U}$ $U, \vartheta$	$\underline{S}$ $P, Q$
PQ	leistungsgeregelte Last, Kraftwerk, HGÜ, sonst. Einspeisung	$\underline{S}$ $P, Q$ $P, \cos\varphi$ $S, \cos\varphi$	$\underline{U}$ $U, \vartheta$
PV	Kraftwerk, sonst. Einspeisung	$P, U$	$Q, \vartheta$
I	stromgeregelte Last	$I$ $I, \cos\varphi$	$\underline{U}$ $U, \vartheta$
Z	ungeregelte Last	$\underline{Z}$	$\underline{U}$ $\underline{S}$

Für die Berechnung muss zwingend ein Slackknoten definiert werden, an welchem der komplexe Spannungszeiger  $\underline{U}$  bekannt ist. Im Allgemeinen wird der Einspeiseknoten aus einer höheren Spannungsebene oder ein großes Kraftwerk als Slackknoten definiert. Die I- und Z-Knoten beschreiben Sonderfälle von Lastverhalten und werden daher nur selten verwendet.

### 2.2.1 Einspeisungen

Die historisch gewachsene Struktur mit großen Einspeisungen in der Hoch- und Höchstspannungsebene verändert sich momentan durch die Installation von im Vergleich kleinen dezentralen Einspeisungen in allen Spannungsebenen.

Für die stationäre Berechnung von Lastflüssen können Einspeisungen durch die Vorgabe von Wirk- und Blindleistung (PQ-Knoten) oder Wirkleistung und Spannungshöhe (PV-Knoten) in ihren Anschlussknoten in das Netzwerk integriert werden. Für dynamische Berechnungen müssen die

Einspeisungen entweder vollständig, sprich durch die entsprechenden Differenzialgleichungen und Regeleinrichtungen, oder durch äquivalente Impedanzen modelliert werden, siehe auch [1]–[3].

### 2.2.2 Lasten

Lasten werden bei der stationären Lastflussberechnung als konstante von der Spannung und der Frequenz unabhängige Scheinleistungsentnahmen an dem Lastknoten angenommen. Unter Umständen ist es allerdings notwendig auch bei Lastflussberechnungen zumindest die stationären Abhängigkeiten von Lasten in die Berechnung einzubeziehen.

Die stationäre Leistungsaufnahme lässt sich durch das folgende nichtlineare System beschreiben und hat einen Gültigkeitsbereich von  $0,5 U_n < U < 1,2 U_n \cdot \lambda$

$$\frac{P(U, f)}{P_n} = \frac{U^{\lambda_P}}{U_n} \left( 1 + K_P \frac{\Delta f}{f_n} \right) \approx 1 + \lambda_P \frac{\Delta u}{U_n} + K_P \frac{\Delta f}{f_n} \quad (2-16)$$

$$\frac{Q(U, f)}{P_n} = \frac{U^{\lambda_Q}}{U_n} \left( 1 + K_Q \frac{\Delta f}{f_n} \right) \approx 1 + \lambda_Q \frac{\Delta u}{U_n} + K_Q \frac{\Delta f}{f_n} \quad (2-17)$$

U	Knotenspannung
$\Delta u$	Knotenspannungsabweichung
$U_n$	Nennknotenspannung
$\Delta f$	Frequenzabweichung
$f_n$	Nennfrequenz
$P(U, f), Q(U, f)$	von Last stationär aufgenommene Leistung
$P_n, Q_n$	Lastleistung bei Nennbetrieb
$\lambda_P, \lambda_Q$	Parameter für Spannungsabhängigkeit
$K_P, K_Q$	Parameter für Frequenzabhängigkeit

Bezüglich der Spannungsabhängigkeit kann zwischen drei Sonderfällen von Lasten unterschieden werden:

- Leistungsgeregelte Lasten,  $\lambda = 0$
- Stromgeregelte Lasten,  $\lambda = 1$
- Ungeregelte Lasten,  $\lambda = 2$

Eine reale Knotenlast setzt sich im Allgemeinen aus mehreren einzelnen Lasten zusammen und entspricht daher keinem dieser Sonderfälle. Durch Messungen an einzelnen Verbrauchern konnten die folgenden Wertebereiche für die Lastparameter gefunden werden, Tabelle 2-2 [1].



Tabelle 2-2

	$\cos\varphi$	$\lambda_P$	$\lambda_Q$	$K_P$	$K_Q$
Haushalt	0,9 - 0,99	1,2...1,5	2,9...3,2	0,8...1,0	-1,5...-2,2
Gewerbe	0,85 - 0,9	1...1,3	3...3,5	1,2...1,5	-1,1...-1,6
Industrie	0,85 - 0,9	0,2	6	2,5	1,6

Weitere und genauere Ausführungen zu dem statischen Lastmodell und dynamischen Lastmodellen sind in [1]–[3] zu finden.

### 3 Allgemeine Lastflussrechnung

Die Aufgabe der Lastflussrechnung ist es den elektrischen Status eines Systems bei vorgegebener Belastung zu berechnen. Als das grundsätzliche Ergebnis der Lastflussberechnung können die komplexen Spannungszeiger jedes Knotens angesehen werden, welche auch als die Zustandsgrößen des Systems bezeichnet werden [2]. Alle relevanten Systemgrößen wie Leistungsfluss, Stromfluss, Spannungseinbrüche, Verluste und andere können mit ihnen berechnet werden.

In weiterer Folge werden alle Größen als Per-Unit-Größen behandelt um die Berechnungen zu vereinfachen und anschaulichere Formeln zu erhalten.

#### 3.1 Systemmatrizen: Strom/Spannungszusammenhänge

Systemmatrizen beschreiben den Zusammenhang zwischen Knotenströmen und Knotenspannungen. Die Art der Matrix (Admittanz-, Impedanz-, oder Hybridmatrix) wird von den bekannten Spannungen und Strömen vorgegeben. Dadurch, dass sich die **Admittanzmatrix** einfach aus der Topologie des Systems und den entsprechenden Ersatzschaltbildern ableiten lässt, ist sie die Ausgangsbasis für die Berechnung aller anderen Matrizen.

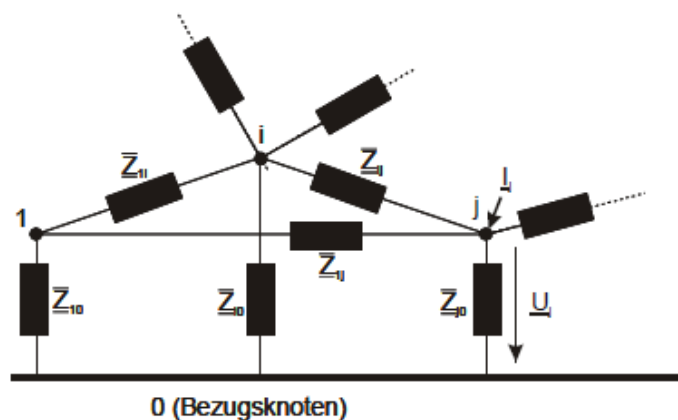


Abbildung 3-1 Ersatzschaltbild eines Netzes durch Zweigimpedanzen, [1]

Die Elemente in der Hauptdiagonale (Eigenadmittanz) sind die Summe aller an dem entsprechenden Knoten verbundener Zweigadmittanzen (Menge  $v_i$ ) und Queradmittanzen. Die Nebendiagonalelemente (Koppeladmittanzen) berechnen sich aus der negativen Summe aller Zweigadmittanzen, welche die entsprechenden Knoten direkt verbinden. Treten mehrere Spannungsebenen auf, müssen entweder alle Admittanzen auf eine gemeinsame Spannungsebenen bezogen werden oder im Per-Unit-System gerechnet werden.

$$\underline{Y}_{ii} = \frac{1}{\underline{Z}_{i0}} + \sum_{j \in v_i} \frac{1}{\underline{Z}_{ij}} \quad (3-1)$$

$$\underline{Y}_{ij} = \underline{Y}_{ji} = -\frac{1}{\underline{Z}_{ij}} \quad (3-2)$$

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{i1} & \cdots & Y_{ii} \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

Die **Impedanzmatrix** kann nun durch Invertieren berechnet werden.

$$\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Y}}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{i1} & \cdots & Z_{ii} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

Die Hauptdiagonalelemente der Impedanzmatrix entsprechen der stationären Kurzschlussimpedanz an dem entsprechenden Knoten falls die Generatorimpedanzen miteinbezogen wurden. Bei Lastknoten sind etwaige parallele Lastimpedanzen zu berücksichtigen.

$$Z_{KS,i} = Z_{ii} \text{ bzw. für Lastknoten } Z_{KS,i} = \frac{Z_{L,i} \cdot Z_{ii}}{Z_{L,i} - Z_{ii}} \quad (3-5), (3-6)$$

Mit Hilfe der Admittanz- und Impedanzmatrix kann der Zusammenhang zwischen Knotenströmen und Knotenspannungen beschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_j \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_j \end{pmatrix} \quad (3-7), (3-8)$$

Im Allgemeinen sind in den Problemstellungen sowohl Spannungen als auch Ströme gegeben, wobei die Zusammenhänge dann mit Hilfe einer **Hybridmatrix** beschrieben werden können. Für die Bildung der Hybridmatrix wird im ersten Schritt die Admittanzmatrix in Teilmatrizen aufgeteilt.

Für das allgemeine System mit M+N Knoten wird angenommen, dass für M Knoten die Spannungen ( $\underline{\mathbf{u}}_A$ ) bekannt sind und für N Knoten die Ströme ( $\underline{\mathbf{i}}_B$ ). Die Systemadmittanzmatrix wird so gewählt, dass sich bei den Strom- und Spannungsvektoren bekannte und gesuchte Größen separieren lassen.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_M \\ I_{M+1} \\ \vdots \\ I_{M+N} \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,M} & Y_{1,M+1} & \cdots & Y_{1,M+N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{M,1} & \cdots & Y_{M,M} & Y_{M,M+1} & \cdots & Y_{M,M+N} \\ \hline Y_{M+1,1} & \cdots & Y_{M+1,M} & Y_{M+1,M+1} & \cdots & Y_{M+1,M+N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{M+N,1} & \cdots & Y_{M+N,M} & Y_{M+N,M+1} & \cdots & Y_{M+N,M+N} \end{array} \right] \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_M \\ U_{M+1} \\ \vdots \\ U_{M+N} \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{i}}_A \\ \underline{\mathbf{i}}_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{AA} & \underline{\mathbf{Y}}_{AB} \\ \underline{\mathbf{Y}}_{BA} & \underline{\mathbf{Y}}_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_A \\ \underline{\mathbf{u}}_B \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

Durch Umformen der partitionierten Strom-Spannungsbeziehung (3-10) können die gesuchten Größen als Operation der Hybridmatrix mit den gegebenen Größen ausgedrückt werden.

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{i}}_A \\ \underline{\mathbf{u}}_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{H}}_{AA} & \underline{\mathbf{H}}_{AB} \\ \underline{\mathbf{H}}_{BA} & \underline{\mathbf{H}}_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_A \\ \underline{\mathbf{i}}_B \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

Die Elemente der Hybridmatrix berechnen sich zu

$$\underline{H}_{AA} = \underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB} \underline{Y}_{BB}^{-1} \underline{Y}_{BA} \quad (3-12)$$

$$\underline{H}_{AB} = \underline{Y}_{AB} \underline{Y}_{BB}^{-1} \quad (3-13)$$

$$\underline{H}_{BA} = -\underline{Y}_{BB}^{-1} \underline{Y}_{BA} \quad (3-14)$$

$$\underline{H}_{BB} = \underline{Y}_{BB}^{-1} \quad (3-15)$$

Die Drehstromleistung der einzelnen Knoten kann bei bekannten Strömen und Spannungen mit Matrizen berechnet werden.

$$\underline{s} = \underline{U}_{diag} \cdot \underline{i}^* = \underline{U}_{diag} \underline{Y}^* \underline{u}^* \quad (3-16)$$

mit

$$\underline{U}_{diag} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \underline{U}_N \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

[1], [5]

Die Topologie eines Netzwerkes kann in einfacher Form mit Hilfe der **Zweig-Knoten-Inzidenzmatrix  $\mathbf{A}$**  beschrieben werden. Sie hat für ein System mit N Knoten und L Zweigen die Dimension LxN. Das Element  $A_{i,j}$  ist 1, wenn der Zweig i am Knoten j beginnt, -1, wenn der Zweig i am Knoten j endet und 0, wenn der Zweig i nicht mit dem Knoten i verbunden ist. Die Summe aller Elemente in einer Zeile muss 0 ergeben.

Die Admittanzmatrix kann mit Hilfe der Inzidenzmatrix und der Zweigadmittanzmatrix  $\underline{Y}_d$  berechnet werden, wenn die Querkapazitäten für alle Zweige vernachlässigt werden können.

$$\underline{Y} = \mathbf{A}^T \underline{Y}_d \mathbf{A} \quad (3-18)$$

Die Elemente der Diagonalmatrix  $\underline{Y}_{diag}$  entsprechen den Admittanzen der einzelnen Zweige. Sie hat die Dimension LxL.

$$\underline{Y}_d = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_L \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

Die vollständige Herleitung und weitere Anwendungen der Zweig-Knoten-Inzidenzmatrix sind in [6] zu finden. In der Literatur wird des Öfteren die transponierte von  $\mathbf{A}$  verwendet und als Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix **KZI**, bzw. node-to-branch incidence matrix **NBI**, bezeichnet.

## 3.2 Lineare und nichtlineare Problemstellungen

Die Problemstellungen von Lastflussberechnungen ergeben sich aus den im Netzbereich vorhandenen Knotenarten.

Unabhängig von der eigentlichen Problemstellung muss immer ein Knoten als Slackknoten definiert werden, an welchem die Spannung vorgegeben wird und sich wie eine starre Spannungsquelle verhält. Als Slackknoten eignen sich grundsätzlich Einspeisungen aus übergeordneten Spannungsebenen oder spannungsgeregelte Generatoren.

### 3.2.1 Lineare Problemstellungen, I- und Z-Knoten

Können Einspeisungen und Lasten in einem Netzbereich als simple I- oder Z-Knoten modelliert werden, handelt es sich um lineare Problemstellungen, welche ohne großen Aufwand mit den Systemmatrizen gelöst werden können. I-Knoten können ohne zusätzlichen Aufwand direkt mit Hilfe der Hybridmatrix behandelt werden.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_i \end{pmatrix} = \underline{\underline{H}} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_i \end{pmatrix} \quad (3-20)$$

In diesem Fall ist der Knoten 1 als Slackknoten gewählt und an den Knoten 2 bis i sind Lasten und Erzeuger als Konstantstromsenken bzw. Konstantstromquellen (I-Knoten) angenommen.

Z-Knoten können ohne weiteren Aufwand in die Admittanzmatrix integriert werden, indem man die entsprechende Admittanz am Lastknoten hinzufügt. Es ist dabei allerdings darauf zu achten, dass der Knotenstrom dabei nicht direkt berechnet wird, sondern nachträglich über die Knotenspannung und der Lastimpedanz bestimmt werden muss.

Die Integration von Lasten als Z-Knoten außerhalb der Admittanzmatrix liefert zwar direkt die Knotenströme ist aber mathematisch aufwändiger und wird nur der Vollständigkeit halber hier angeführt. Für die Bestimmung der Berechnungsvorschrift wird ein System mit M+N Knoten angenommen, wobei an M Knoten die Spannung  $U_i$  bekannt ist und an N Knoten der Lastwiderstand  $Z_{Li}$ . Die dementsprechend partitionierte Strom-Spannungsbeziehung ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} \underline{i}_A \\ \underline{i}_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{AA} & \underline{Y}_{AB} \\ \underline{Y}_{BA} & \underline{Y}_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_A \\ \underline{u}_B \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

und lässt sich in zwei Gleichungssysteme aufspalten

$$\underline{i}_A = \underline{Y}_{AA}\underline{u}_A + \underline{Y}_{AB}\underline{u}_B \quad (3-22)$$

$$\underline{i}_B = \underline{Y}_{BA}\underline{u}_A + \underline{Y}_{BB}\underline{u}_B \quad (3-23)$$

Der Index A (i=1 bis M) bezieht sich dabei auf die Knoten mit bekannten Spannungen, der Index B (i=M+1 bis N) auf Knoten mit bekannter Lastimpedanz  $Z_{Li}$ .

Ersetzt man  $\underline{u}_B$  in den Gleichungen (3-22) und (3-23) durch

$$\underline{u}_B = -\underline{Z}_{dL}\underline{i}_B \quad (3-24)$$

$$\underline{Z}_{dL} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{LM+1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{LN} \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

und löst das Gleichungssystem für  $\underline{i}_A$  und  $\underline{i}_B$  erhält man in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} \underline{i}_A \\ \underline{i}_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{AA} - \underline{Y}_{AB}\underline{Z}_{dL}(\underline{E} + \underline{Y}_{bb}\underline{Z}_{dL})^{-1}\underline{Y}_{BA} \\ (\underline{E} + \underline{Y}_{bb}\underline{Z}_{dL})^{-1}\underline{Y}_{BA} \end{bmatrix} \cdot \underline{u}_A = \begin{bmatrix} \underline{X}_{AA} \\ \underline{X}_{AB} \end{bmatrix} \cdot \underline{u}_A \quad (3-26)$$

Das Minus in (3-24) ergibt sich aus der Definition, dass Knotenströme und –leistungen für Verbraucher negativ sind. Aus der Gleichung (3-26) kann für den gewünschten Slackknoten, wie in Kapitel 3.1 gezeigt, der sich Lastfluss berechnet werden.

Die Dimensionen der Teilmatrizen sind in Tabelle 3-1 angegeben.

<i>Tabelle 3-1</i>	
Zeilen x Spalten	
$\underline{u}_A$	Mx1
$\underline{i}_A$	Mx1
$\underline{i}_B$	Nx1
$\underline{Z}_{dL}$	NxN
$\underline{X}_{AA}$	MxM
$\underline{X}_{AB}$	NxM

### 3.2.2 Iterationsverfahren

In Allgemeinen werden allerdings Einspeisungen und Lasten durch PQ- bzw. PV-Knoten beschrieben, wodurch sich nichtlineare Aufgabenstellungen ergeben. Die gegebenen Größen können nicht direkt in die Lastflussgleichungen integriert werden, sondern müssen durch Ersetzen der entsprechenden Ströme ausgedrückt werden.

Ein allgemeines System beschrieben durch seine Hybridmatrix hat N Knoten, wobei Knoten 1 als Slackknoten (Index A) gewählt ist und die Knoten 2-N (Index B) als PQ-Knoten angenommen sind. Aus dem entsprechenden Gleichungssystem (3-11) lassen sich Gleichungen für die Spannung an den PQ-Knoten angeben.

$$\underline{u}_B = \underline{H}_{BA}\underline{u}_A + \underline{H}_{BB}\underline{i}_B \quad (3-27)$$

Die Ströme  $\underline{i}_B$  können aus der bekannten Scheinleistung der Knoten B berechnet werden.

$$\underline{i}_B = (\underline{U}_{Bdiag}^{-1})^* \cdot \underline{s}_B^* \quad (3-28)$$

Es ergibt sich dadurch für  $\underline{u}_B$  ein nichtlineares Gleichungssystem, welches durch Iteration gelöst werden kann. Als Abbruchbedingung für die Iteration wird die Änderung der Spannung zwischen den Schritten  $i$  und  $i-1$  verwendet

$$\underline{u}_{B,i} = \underline{H}_{BA}\underline{u}_A + \underline{H}_{BB}(\underline{U}_{Bdiag,i-1}^{-1})^* \cdot \underline{s}_B^* \quad (3-29)$$

$$\underline{U}_{Bdiag,i} = \text{diag}(\underline{u}_{B,i}) \quad (3-30)$$

$$|\underline{u}_{B,i} - \underline{u}_{B,i-1}| < \varepsilon \quad (3-31)$$

Als Startwerte für  $\underline{U}_{Bdiag,0}$  eignet sich im Per-Unit-System die Einheitsmatrix. Diese Startwertvorgabe wird als Flat Start bezeichnet und entspricht Nennspannung und gleichem Phasenwinkel an allen Lastknoten. Typische Werte für die Abbruchbedingungen  $\varepsilon$  liegen zwischen  $10^{-6}$  und  $10^{-3}$ .

PV-Knoten können nur durch großen mathematischen Aufwand mit Hilfe des Iterationsverfahrens berechnet werden. Es ist daher zielführender auch einfache Problemstellungen mit PV-Knoten mit dem Funktionalmatrizenverfahren zu lösen.

Bei Netzen mit einer größeren Anzahl an PQ- bzw. PV-Knoten kann es zu langen Berechnungszeiten kommen, insbesondere bei vollständiger Berücksichtigung der Querelemente.

### 3.2.3 Funktionalmatrizenverfahren

Diese Lösungsmethode für die nichtlinearen Problemstellungen basiert auf dem Leistungsfluss über die einzelnen Zweige des Systems, allerdings werden wie hierbei einige Annahmen getroffen um die Berechnung zu erleichtern.

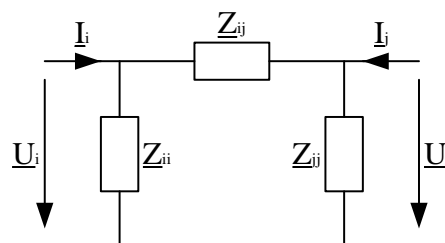


Abbildung 3-2,  $\pi$ -Ersatzschaltung eines Zweiges

Der Leistungsfluss von dem Knoten  $i$  zu dem Knoten  $j$  über einen einzelnen als  $\pi$ -Ersatzschaltung beschriebenen Zweig berechnet sich zu

$$\underline{S}_{ij} = \underline{U}_i \underline{I}_i^* = \underline{U}_i^2 (\underline{Y}_{ii}^* + \underline{Y}_{ij}^*) - \underline{U}_i \underline{U}_j^* \underline{Y}_{ij}^* \quad (3-32)$$

Bei Vernachlässigung der Querelemente, das entspricht einer Vernachlässigung der Leitungskapazitäten, vereinfacht sich die Zweigleistung zu

$$S_{ij} = U_i^2 Y_{ij}^* - \underline{U}_i \underline{U}_j^* Y_{ij}^* \quad (3-33)$$

Durch Separation von Wirk- und Blindleistung erhält man die folgenden Gleichungen

$$P_{ij} = \frac{U_i^2}{Z_{ij}} \cos(\psi_{ij}) - \frac{U_i U_j}{Z_{ij}} \cos(\vartheta_i - \vartheta_j + \psi_{ij}) \quad (3-34)$$

$$Q_{ij} = \frac{U_i^2}{Z_{ij}} \sin(\psi_{ij}) - \frac{U_i U_j}{Z_{ij}} \sin(\vartheta_i - \vartheta_j + \psi_{ij}) \quad (3-35)$$

Kann die Zweigimpedanz zwischen den Knoten i und j als rein induktiv angenommen werden, das entspricht einer verlustlosen Leitung, vereinfachen sich die Gleichungen (3-34) und (3-35) zu

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{Z_{ij}} \sin(\vartheta_i - \vartheta_j) \quad (3-36)$$

$$Q_{ij} = \frac{U_i^2}{Z_{ij}} - \frac{U_i U_j}{Z_{ij}} \cos(\vartheta_i - \vartheta_j) \quad (3-37)$$

Ausgehend von den Gleichungen für die Leistungsübertragung, lässt sich die Knotenleistung im Knoten i als Summe aller Zweigleistungen berechnen, wobei  $v_i$  alle Knotenindizes welche direkt mit Knoten i verbunden sind beinhaltet.

$$P_i = U_i \sum_{j \in v_i} \frac{U_j}{Z_{ij}} \sin(\vartheta_i - \vartheta_j) \quad (3-38)$$

$$Q_i = U_i \sum_{j \in v_i} \left( \frac{U_i}{Z_{ij}} - \frac{U_j}{Z_{ij}} \cos(\vartheta_i - \vartheta_j) \right) \quad (3-39)$$

Alle Knotenleistungen eines Systems mit N Knoten können nun als nichtlineare Funktion von Knotenspannung und deren Winkel ausgedrückt werden.

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = f(\vartheta_1, \dots, \vartheta_N, U_1, \dots, U_N) \text{ bzw. } \underline{s} = f(\underline{u}) \quad (3-40)$$

Durch Ableiten von  $f(\underline{u})$  nach  $\underline{u}$  und  $\underline{\vartheta}$  bzw.  $\underline{u}$  erhält man die Jacobimatrix und die Änderung der Leistung. Es kann durch Einsetzen eines Arbeitspunktes  $\underline{u}_0$  die Leistungsänderung um den Arbeitspunkt linearisiert werden [5, p. 72].

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{p} \\ d\mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \vartheta} & \frac{\partial P}{\partial U} \\ \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} & \frac{\partial Q}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\vartheta \\ d\mathbf{u} \end{pmatrix} \text{ bzw. } d\underline{s} = \mathbf{J} \cdot d\underline{u} \quad (3-41)$$



Aus den Gleichungen (3-40), (3-41) und den durch die von PQ- bzw. PV-Knoten vorgegebenen Leistungen lässt sich eine Lösung mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahren finden. Der Index  $i$  gibt dabei den Iterationsschritt an.

$$g(\underline{\mathbf{u}}_i) = f(\underline{\mathbf{u}}_i) - \underline{\mathbf{s}}_{\text{sol}} = !0 \quad (3-42)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}_i) = J(\underline{\mathbf{u}}_i) \quad (3-43)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{i+1} = \underline{\mathbf{u}}_i - J(\underline{\mathbf{u}}_i)^{-1} \cdot g(\underline{\mathbf{u}}_i) \quad (3-44)$$

Bei der Berechnung der Ableitung von  $g$  ist zu beachten, dass  $\underline{\mathbf{s}}_{\text{sol}}$  die vorgegebenen Werte der PQ- und PV-Knoten beinhaltet und daher eine Konstante ist. Die Iteration wird beendet sobald die  $g(\underline{\mathbf{u}}_i)$  eine gewählte Schranke ( $10^{-6}$  bis  $10^{-3}$ ) unterschreitet.

Bei der Anwendung des Funktionalmatrizenverfahrens ist die gesuchte Größe die komplexe Spannung  $U$  in jedem Knoten, durch die Aufspaltung in Betrag und Phase ergeben sich für ein Netzwerk mit  $N$  Knoten folglich  $2N$  Gleichungen. Die Vorgabe des Slackknotens (Betrag und Phase bekannt) und PV-Knoten (Betrag der Spannung bekannt) verringern die Anzahl der Gleichungen auf  $2(N-1) - \#(\text{PV-Knoten})$ . Die entsprechenden Zeilen des Gleichungssystems (3-40) und (3-41) werden vor der Berechnung gestrichen.

Prinzipiell kann das Newton-Raphson-Verfahren auch ohne jegliche Vereinfachungen durchgeführt werden, allerdings vergrößert sich der Rechenaufwand, insbesondere bei Erstellen der Jakobi-Matrize.

### 3.3 Netzreduktion

Nachdem der Rechenaufwand mit der Anzahl der Knoten in einem Netz ansteigt, kann es notwendig sein das untersuchte Netz zu reduzieren. Es wird dabei auf Spannungsinformationen in reduzierten Knoten und auf die Lastflüsse auf den reduzierten Leitungen verzichtet.

Der erste Schritt zur Netzreduktion ist die Definition des Netzbereiches, welcher vollständig berechnet werden soll. Die in diesem Bereich liegenden Knoten, welche nur Zweige zu Knoten besitzen, welche ebenfalls innerhalb des betrachteten Netzbereichs liegen, bleiben unverändert und sind im Folgenden als Gruppe 1 bezeichnet, die Randknoten sind in Gruppe 2 zusammengefasst. Die Knoten außerhalb des definierten Bereichs, Gruppe 3, sind die zu reduzierenden Knoten, siehe Abbildung 3-3. Die Admittanzmatrix des aufgeteilten Systems ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{i}}_1 \\ \underline{\mathbf{i}}_2 \\ \underline{\mathbf{i}}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{Y}}_{11} & \underline{\mathbf{Y}}_{12} & 0 \\ \underline{\mathbf{Y}}_{21} & \underline{\mathbf{Y}}_{22} & \underline{\mathbf{Y}}_{23} \\ 0 & \underline{\mathbf{Y}}_{32} & \underline{\mathbf{Y}}_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\mathbf{u}}_2 \\ \underline{\mathbf{u}}_3 \end{pmatrix} \quad (3-45)$$

Bei Formel (3-45) und im Folgenden ist zu beachten, dass die Teilelemente der Strom-/Spannungsvektoren und Admittanzmatrix ebenfalls Vektoren und Matrizen mit der entsprechenden Größe der dazugehörenden Knotengruppe sind.

Durch die Wahl der Knotengruppen sind die Teilmatrizen  $\underline{Y}_{13}$  und  $\underline{Y}_{31}$  leer, wodurch es möglich ist die Knoten der Gruppe 3 als Ersatzlasten bzw. Ersatzspeisungen in den Knoten der Gruppe 2 zu integrieren. Die Knotenspannungen  $\underline{u}_3$ , Gleichung (3-46), wird dafür in den Gleichungen der Ströme  $\underline{i}_2$ , (3-47), eliminiert. Aus der resultierenden Gleichung, (3-48), kann nun in Ersatzspeisung an den Knoten der Gruppe 2  $\underline{i}'_2$  und eine Ersatzadmittanzmatrix  $\underline{Y}'_{22}$  ermittelt werden.

$$\underline{u}_3 = \underline{Y}_{33}^{-1} \underline{i}_3 - \underline{Y}_{33}^{-1} \underline{Y}_{32} \underline{u}_2 \quad (3-46)$$

$$\underline{i}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{u}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{u}_2 + \underline{Y}_{23} \underline{u}_3 \quad (3-47)$$

$$\underbrace{\underline{i}_2 - \underline{Y}_{23} \underline{Y}_{33}^{-1} \underline{i}_3}_{\underline{i}'_2} = \underline{Y}_{21} \underline{u}_1 + \underbrace{(\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{23} \underline{Y}_{33}^{-1} \underline{Y}_{32})}_{\underline{Y}'_{22}} \underline{u}_2 \quad (3-48)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{i}'_1 \\ \underline{i}'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}'_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} \quad (3-49)$$

Das durch (3-49) beschriebene Ersatznetz verhält sich an den Knoten der Gruppe 2 exakt wie das ursprüngliche Netz.

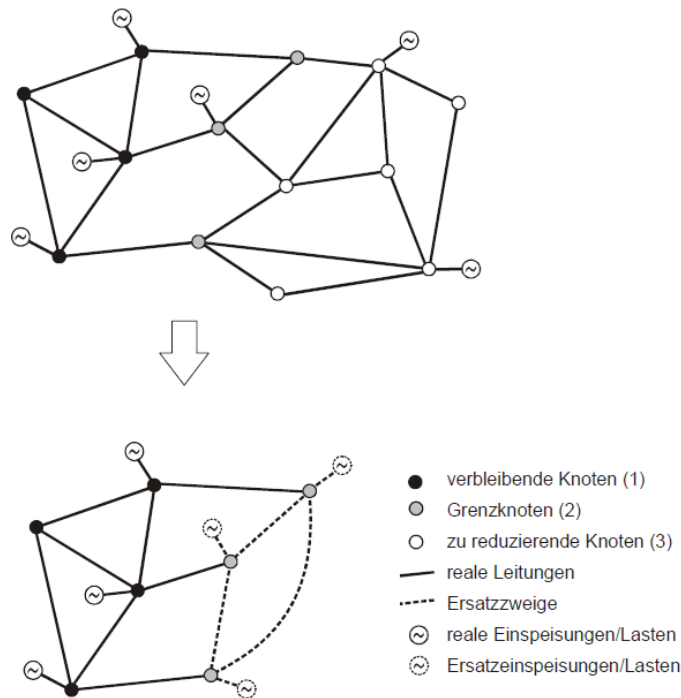


Abbildung 3-3, Vollständiges und reduziertes Netz, [1]

[1]

Knoten ohne Last oder Einspeisung an welchen nur zwei Zweige verbunden sind, lassen sich durch die Berechnung der Serienschaltung von den  $\pi$ -Ersatzschaltungen der Zweige reduzieren. Ein Beispiel für solche Knoten sind Übergänge von Freileitungen auf Kabelstrecken, welche ohne Reduzierung als PQ-Knoten mit einer Scheinleistung von 0 behandelt werden müssten.

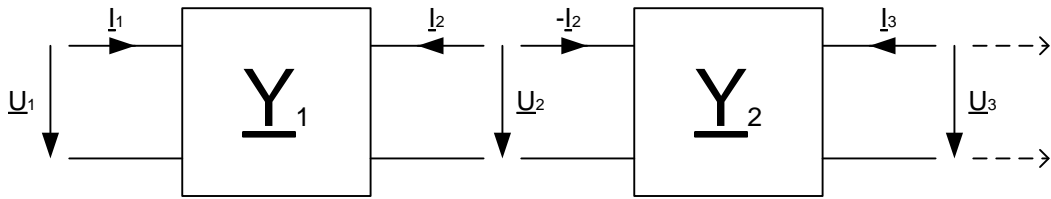


Abbildung 3-4, Schematische Darstellung von seriellen Zweigen

Im ersten Schritt wird ausgehend von der Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  eines Zweiges die inverse Kettenmatrix bestimmt. In der Literatur wird die inverse Kettenmatrix im Allgemeinen mit  $\underline{B}$  bezeichnet, allerdings wird in diesem Skriptum  $\underline{B}$  bereits für die Suszeptanzmatrix verwendet. Es wird daher für die inverse Kettenmatrix  $\underline{K}$  verwendet um Verwechslungen zu vermeiden.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (3-50)$$

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_{12}} \begin{bmatrix} -Y_{11} & 1 \\ \det(\underline{Y}) & -Y_{22} \end{bmatrix}_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \underline{K}_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (3-51)$$

Der Strom  $I_2$  wird für die Berechnung von  $\underline{K}$  als negativ gewählt um weitere  $\pi$ -Glieder durch einfache Matrizenmultiplikationen in Serie schalten zu können. Für mehrere Glieder kann die resultierende inverse Kettenmatrix als Produkt der einzelnen Matrizen berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ -I_3 \end{pmatrix} = \underline{K}_2 \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \underline{K}_2 \underline{K}_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (3-52)$$

In weiterer Folge kann aus (3-52) die resultierende Ersatzadmittanzmatrix der seriellen Zweige berechnet werden. Aus den Elementen der Ersatzadmittanzmatrix können die Leitungsparameter der Ersatzleitung bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{K_{13}} \begin{bmatrix} -K_{11} & 1 \\ \det(\underline{K}) & -K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} \quad (3-53)$$

## 4 DC-Lastfluss

Der DC-Lastfluss ist eine Linearisierung des allgemeinen AC-Lastflusses. Die Linearisierung basiert auf den folgenden drei Annahmen:

1. Für die Zweige wird vorausgesetzt, dass der Widerstandsbelag im Vergleich zu dem Induktivitätsbelag vernachlässigbar klein ist und die Querkapazitäten ebenfalls nicht betrachtet werden müssen. Durch die gewählte Vereinfachung gehen die Netzverluste nicht in den Lastfluss ein.

$$\underline{Z}_{ij} \approx jX_{ij} \quad \forall \text{ Zweige} \quad (4-1)$$

Für den DC-Lastfluss ist es in der Folge ausreichend, anstelle der komplexen Zweigadmittanzdiagonalmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}_d$  eine Zweigsuszeptanzdiagonalmatrix  $\mathbf{B}_d$  zu verwenden. Die daraus resultierende Systemsuszeptanzmatrix wird mit  $\mathbf{B}$  bezeichnet.

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{X_N} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_d \mathbf{A} \quad (4-3)$$

2. Das Spannungsprofil wird über das gesamte Netz als flach angenommen, das heißt alle Knotenspannungen sind im Per-Unit-System gleich groß.

$$U_i \approx 1 \quad \forall \text{ Knoten} \quad (4-4)$$

3. Die Spannungswinkel zwischen benachbarten Knoten werden als klein angenommen. Dadurch können die trigonometrischen Terme der AC-Lastflussgleichungen linearisiert werden.

$$\sin(\delta_i - \delta_j) \approx \delta_i - \delta_j \quad (4-5)$$

$$\cos(\delta_i - \delta_j) \approx 1 \quad (4-6)$$

Aus den Annahmen für den DC-Lastfluss kann abgeleitet werden, dass nur Wirkleistungslastflüsse berechnet werden, sowie perfekte Spannungsstützung, Blindleistungsmanagement und vernachlässigbare Übertragungsverluste vorausgesetzt werden.

Dadurch, dass der DC-Lastfluss eine Linearisierung des allgemeinen Lastflusses ist, hat der gewählte Arbeitspunkt auf die Linearisierung einen Einfluss, welcher aber nur gering ist. In der Praxis können daher die gleichen DC-Lastflussgleichungen für alle möglichen Arbeitspunkte verwendet werden, solange es keine Änderung in der Topologie gibt.

## 4.1 Grundlegende DC-Lastflussgleichungen - PTDF

Die Lastflussgleichungen (3-36) und (3-37) werden mit den Annahmen für den DC-Lastflusses weiter vereinfacht:

$$P_{ij} = \frac{U_i U_j}{Z_{ij}} \sin(\vartheta_i - \vartheta_j) \approx \frac{1}{X_{ij}} (\vartheta_i - \vartheta_j) \quad (4-7)$$

$$Q_{ij} = \frac{U_i^2}{Z_{ij}} - \frac{U_i U_j}{Z_{ij}} \cos(\vartheta_i - \vartheta_j) \approx 0 \quad (4-8)$$

Die Zweigleistungen können mit Hilfe der Inzidenzmatrix und der Zweigsuszeptanzmatrix berechnet werden.

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{B}_d \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (4-9)$$

Die Knotenleistung  $P_i$  wird, wie beim AC-Lastfluss, aus der Summe aller Zweigleistungen  $P_{ij}$  gebildet. In der Menge  $v_i$  sind die mit Knoten  $i$  verbundenen Knoten angegeben.

$$P_i = \sum_{j \in v_i} \frac{1}{X_{ij}} (\vartheta_i - \vartheta_j) \quad (4-10)$$

Die Knotenleistungen des gesamten Netzes können mit Hilfe der Admittanzmatrix bzw. der Inzidenzmatrix und den Zweigadmittanzen, berechnet werden.

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_d \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (4-11)$$

Für die Berechnung des DC-Lastflusses muss, wie auch beim AC-Lastfluss, ein Slackknoten definiert werden. An diesem Knoten ist der Spannungswinkel mit 0 vorgegeben und muss aus dem Set an Gleichungen eliminiert werden um die Singularität in den Matrizen zu verhindern. Die Eliminierung entspricht der Reduzierung der auf den Slackknoten referenzierten Spalte und Zeile der Matrix  $\mathbf{Y}_B$ , der dem Slackknoten zugeordneten Spalte der Matrix  $\mathbf{B}_d \mathbf{A}$  und den entsprechenden Einträgen in  $\mathbf{p}$  und  $\boldsymbol{\delta}$ . Diese Reduktion kann rechnerisch einfacher implementiert werden, indem die dem Slackknoten zugeordnete Spalte in  $\mathbf{A}$  eliminiert wird. Als zusätzliche Gleichung, um eine eindeutige Lösung zu erhalten, wird die Summe aller Knotenleistungen, welche ident 0 sein muss, benötigt.

$$\sum_{i=1}^N P_i = 0 \quad (4-12)$$

Aus den Gleichungen (4-9) und (4-11) kann ein linearer Zusammenhang zwischen den Zweigleistungen und den Knotenleistungen berechnet werden.

$$\mathbf{p}_L = (\mathbf{B}_d \mathbf{A}) (\mathbf{A}^T \mathbf{B}_d \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{p}_N = \mathbf{PTDF} \cdot \mathbf{p}_N \quad (4-13)$$

Für die Berechnung der Power Transfer Distribution Faktor Matrix (**PTDF**) müssen die reduzierten Matrizen verwendet werden, wodurch die Matrix für ein Netzwerk mit  $L$  Zweigen und  $N$  Knoten die Dimension  $L \times (N-1)$  hat. Das Element  $PTDF_{in}$  gibt den durch eine Leistungsinjektion von 1 p.u. im Knoten  $n$  und Leistungsentnahme von 1 p.u. im Slackknoten verursachten Lastfluss über die Leitung  $l$  an. Die Werte der einzelnen Elemente sind daher von der Wahl des Slackknoten beeinflusst.

Anzumerken ist, dass der einfache Zusammenhang zwischen Knotenleistung und Zweigleistung, welcher sich aus den Gleichungen (4-9) und (4-11) zu

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{p}_L \quad (4-14)$$

ableiten lässt, wegen der Nichtexistenz der Inversen von  $\mathbf{A}$  nicht umkehrbar ist.

## 4.2 Phasenschiebertransformatoren im DC-Lastfluss - PSDF

Im DC-Lastfluss können Phasenschiebertransformatoren (PST) als einfache Winkeländerung  $\alpha_{ij}$  zwischen den Anschlussknoten  $i$  und  $j$  implementiert werden. Die erweiterten Gleichungen für die Zweig- und Knotenleistungen ergeben sich zu

$$P_{ij} = \frac{1}{X_{ij}} (\vartheta_i - \vartheta_j + \alpha_{ij}) \quad (4-15)$$

$$P_i = \sum_{j \in v_i} \frac{1}{X_{ij}} (\vartheta_i - \vartheta_j + \alpha_{ij}) \quad (4-16)$$

und können mit den entsprechenden Matrizen übergeführt werden in

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{B}_d \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathbf{B}_d \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (4-17)$$

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_d \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathbf{A}^T \mathbf{B}_d \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (4-18)$$

Werden diese beiden Gleichungen zusammengeführt erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen den Zweigleistungen und den Knotenleistungen sowie den Phasenschieberwinkeln, welcher mit Hilfe der schon bekannten **PTDF** Matrix und der Phase Shift Distribution Faktor **PSDF** Matrix beschrieben wird.

$$\mathbf{p}_L = \mathbf{PTDF} \cdot \mathbf{p}_N + \mathbf{PSDF} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (4-19)$$

mit

$$\mathbf{PSDF} = \mathbf{B}_d - (\mathbf{B}_d \mathbf{A}) (\mathbf{A}^T \mathbf{B}_d \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{B}_d) \quad (4-20)$$

Für die Berechnung der **PSDF** Matrix müssen, wie schon für die **PTDF**, die reduzierten Matrizen verwendet werden. Das Element  $\text{PSDF}_{ll'}$  gibt hierbei die Änderung der übertragenen Leistung des Zweigs  $l$  für eine Winkeländerung von 1 rad im Zweig  $l'$  an. Das Vorzeichen der Leistungsänderung ist durch das Vorzeichen der Winkeländerung in den Gleichungen (4-15) und (4-16) festgelegt. In diesem Skriptum wurde sie so gewählt, dass eine positive Winkeländerung zu einer positiven Leistungsänderung im zugehörigen Zweig führt. Im Gegensatz zu den Elementen der **PTDF** Matrix sind die Werte der **PSDF** Matrix von dem gewählten Slackknoten unabhängig.

Für die Berechnung der **PSDF** wurde bisher angenommen, dass in jedem Zweig ein PST vorhanden ist und dadurch auch eine Winkeländerung auftritt und die Dimension folglich für ein Netz mit  $L$  Zweigen  $L \times L$  ist. In der Realität sind allerdings nur die wenigsten Zweige mit PSTs ausgestattet und in allen anderen Zweigen sind die Winkeländerungen ident Null. Die **PSDF** kann daher auf die den PST-Zweigen zugeordneten Spalten reduziert werden und hat für ein Netz mit  $L$  Zweigen und  $L'$  PST-Zweigen die Dimension  $L \times L'$ .

### 4.3 Auswirkung von Zweigaussfällen im DC-Lastfluss – LODF

Neben einer schnellen Berechnung der Wirkleistungsflüsse kann mit Hilfe des DC-Lastflusses auch die Auswirkung von Ausfällen von einzelnen Zweigen berechnet werden. Für die Analyse der möglichen Ausfallszenarien ist es sinnvoll, dass das System in ausgefallene Zweige und verbleibende Zweige und den dazugehörigen Inzidenzmatrizen zu unterteilt wird. Es wird dafür die folgende Notation verwendet:

R	Index für die Menge der verbleibende (remaining) Zweige
O	Index für die Menge der ausgefallenen (outage) Zweige
$\Phi$	Knoten-verbleibende-Zweige-Inzidenzmatrix, entspricht den Spalten R in $\mathbf{A}^T$
$\Psi$	Knoten-ausgefallene-Zweige-Inzidenzmatrix, entspricht den Spalten O in $\mathbf{A}^T$
b	Base case, Vorfehlerzustand
c	Post contingency case, Nachfehlerzustand

Mit Hilfe dieser Definition lassen sich die korrespondierenden Teilmatrizen der **PTDF** und **PSDF** folgend allgemein berechnen:

$$PTDF_R = (\mathbf{B}_{dR} \Phi^T) \mathbf{B}^{-1} \quad (4-21)$$

$$PSDF_{RR} = \mathbf{B}_{dR} - \mathbf{B}_{dR} \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot (\Phi \cdot \mathbf{B}_{dR}) \quad (4-22)$$

$$PSDF_{OR} = PSDF_{RO}^T = -\mathbf{B}_{dO} \cdot \Psi^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot (\Phi \cdot \mathbf{B}_{dR}) \quad (4-23)^1$$

Die zu der Menge O gehörenden Matrizen können durch Einsetzen von  $\mathbf{B}_{dO}$  und  $\Psi$  für die Suszeptanz- und Inzidenzmatrizen in Gleichungen (4-21) und (4-22) ermittelt werden.

Der Wirkleistungsfluss nach Ausfall von O Zweigen kann konventionell bestimmt werden, indem die neue Systemsuszeptanzmatrix  $\mathbf{B}^c$  aus den Suszeptanzen und Inzidenzmatrizen der Zweige aus R gebildet wird und die dazugehörigen **PTDF**- und **PSDF**-Matrizen berechnet werden.

$$\mathbf{B}^c = \Phi \mathbf{B}_{dR} \Phi^T \quad (4-24)$$

$$\mathbf{p}_{LR}^c = PTDF_R^c \cdot \mathbf{p}_N + PSDF_{RR}^c \cdot \boldsymbol{\alpha}_R \quad (4-25)$$

Eine alternative Berechnungsmethode ist die Verwendung der Line Outage Distribution Faktor Matrix (**LODF**). Das Element  $LODF_{ro}$  gibt dabei die zusätzliche Zweigleistung normiert auf 1 p.u. im Zweig r nach einem Ausfall von Zweig o an. Durch die Linearität des DC-Lastflusses kann der Nachfehlerlastfluss in den Zweigen R aus einer Überlagerung des Ausgangszustandes und den durch den Ausfall der Zweige O verursachten zusätzlichen Lastflüssen berechnet werden:

$$\mathbf{p}_{LR}^c = \mathbf{p}_{LR}^b + LODF_{RO} \cdot \mathbf{p}_{LO}^b \quad (4-26)$$

<sup>1</sup> Die Gleichheit von  $PSDF_{OR}$  und  $PSDF_{RO}^T$  ist durch die Diagonalsymmetrie der **PSDF** Matrix gegeben und lässt sich durch Anwendung von  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  auf (4-23) einfach beweisen.

$$\mathbf{LODF}_{RO} = \mathbf{PTDF}_R^c \cdot \boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}_{dR} \cdot \boldsymbol{\phi}^T \cdot \mathbf{B}^{c-1} \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (4-27)$$

Aus der Definition der **LODF** Matrix ist ersichtlich, dass es sich dabei um die Berechnung der Zweigleistungen eines passiven Netzwerkes, d.h. es werden Leistungen eingespeist bzw. entnommen, bei Übertragung von 1 p.u. vom Anfangknoten  $i$  zum Endknoten  $j$  des ausgefallenen Zweigs  $o$ . Bei Betrachtung von mehreren ausgefallenen Zweigen, entspricht jede Spalte der **LODF** Matrix den zusätzlichen Zweigleistungen des passiven Netzwerkes. Folglich ist die Dimension der **LODF** für ein Netzwerk mit  $R$  nichtausgefallenen Zweigen und  $O$  ausgefallenen Zweigen  $R \times O$ .

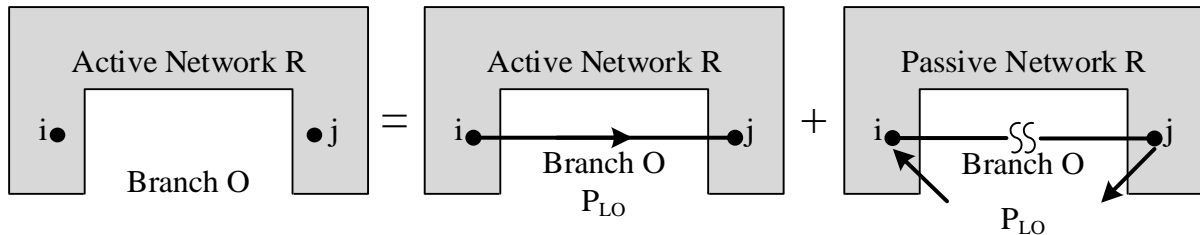


Abbildung 4-1, Schematische Darstellung der Zweigleistung im Nachfehlerzustand mit LODFs

Für die Berechnung von Netzen mit einer großen Anzahl an Knoten benötigen beide Methoden viel Rechenzeit, da die notwendige Invertierung der Systemsuszeptanzmatrix durchgeführt werden muss. Bei der Verwendung von der **LODF** kann die Invertierung umgangen werden, in dem folgende Berechnung angewendet wird [7]

$$\mathbf{LODF}_{RO} = \mathbf{PTDF}_R \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{PTDF}_O \cdot \boldsymbol{\psi})^{-1} = \mathbf{PTDF}_{RO} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{PTDF}_{OO})^{-1} \quad (4-28)$$

Durch effizientere Berechnung der **LODF** Matrix wird die benötigte Rechenzeit stark reduziert, wobei die Reduktion von der Anzahl der ausgefallenen Leitungen und der Knoten des betrachteten Netzwerkes abhängig ist. Bei Untersuchungen im ENTSO-E-Übertragungsnetz mit 9865 Knoten und 6080 Zweigen konnte dabei die Rechenzeit um bis zu dem Faktor 10 reduziert werden. Es ist dabei zu betonen, dass sich bei Betrachtungen von Ausfallkaskaden sich diese Faktoren für jeden Rechenschritt ergeben und die Gesamtreduktion daher exponentiell mit der Anzahl der Rechenschritte ansteigt.

Ein weiterer Vorteil der Verwendung von **LODF** Matrizen ist, dass auch Ausfälle von Phasenschiebertransformatoren keine gesonderte Berechnung benötigen.

#### 4.4 Abschätzung der Genauigkeit

Der DC-Lastfluss ist aus den getroffenen Annahmen heraus prinzipiell fehlerbehaftet. Die prozentuelle Abweichung zwischen AC-Lastflussergebnissen als Referenz und den Ergebnissen können wie folgend abgeschätzt werden. Eine genaue Beschreibung ist in [6] und [8] zu finden.

Die erste Vereinfachung, dass Leitungsverluste vernachlässigt werden können (Zweigimpedanzen rein induktiv), deckt sich mit steigendem Spannungslevel des Netzes immer besser mit der Realität. Das durchschnittliche R/X-Verhältnis, ermittelt im Belgischen Hochspannungsnetz, reicht von 0,10 für 380 kV zu 0,32 für 70 kV. Der durchschnittliche Fehler in der Lastflussberechnung lässt sich für R/X-Verhältnisse unter 0,5 mit unter 5 % und bei R/X-Verhältnissen unter 0,2 mit unter 2 % angeben.



Die zweite Annahme für den DC-Lastfluss geht von einem ideal flachen Spannungsprofil über das gesamte betrachtete Netz aus. In der Realität ist es allerdings nahezu unmöglich ein solches Profil zu erreichen und Spannungsfluktuationen treten immer auf. Der durchschnittliche Fehler für geringe Spannungsfluktuationen (kleiner als 0,01 p.u.) kann mit 5 % angegeben werden. Jedoch zeigen realistische Beispiele weit größere Spannungsfluktuationen, wodurch hier die größte Quelle für Ungenauigkeiten in der Lastflussberechnung zu finden sind.

Die dritte Annahme, kleine Spannungswinkel zwischen benachbarten Lasten, ist im Allgemeinen zutreffender je weniger belastet ein Netz ist. In vermaschten Netzen kann aber auch bei Starklast von geringen Winkeldifferenzen ausgegangen werden und der Linearisierungsfehler kann mit unter 1 % angenommen werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Genauigkeit der DC-Lastflussrechnung eine durchschnittliche Abweichung von ca. 5 % zu dem AC-Lastfluss aufweist. Der Fehler des Lastflusses über einzelne Zweige kann jedoch durch ungünstige Verhältnisse stärker abweichen. Des Weiteren ist festzuhalten, dass die Abweichung des DC-Lastfluss zu den realen Lastflüssen im Allgemeinen größer sein wird, da durch Netzwerkvereinfachungen und von der Realität abweichenden Daten auch der AC-Lastfluss den realen Lastfluss nicht vollständig beschreiben kann.

[6]–[8]

## 5 Literaturverzeichnis

- [1] H. Renner, "Regelung und Stabilität Skriptum," 2013.
- [2] J. Machowski, J. W. Bialek, and J. R. Bumby, *Power System Dynamics: Stability and Control*, 2nd ed. Re. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [3] P. Kundur and R. I. E. Power, "Power system stability and control," p. 1–23+1176 s, 1994.
- [4] J. Bacher, *Skriptum zu "Elektrische Maschinen für die Energietechnik."* 2013.
- [5] L. Fickert and H. Renner, "Elektrische Energiesysteme 1 Skriptum," 2008.
- [6] K. Van Den Bergh, E. Delarue, and W. D'haeseleer, "DC power flow in unit commitment models," *TME Work. Pap. Environ.*, no. May, pp. 1–38, 2014.
- [7] J. Guo, Y. Fu, Z. Li, and M. Shahidehpour, "Direct calculation of line outage distribution factors," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 24, no. 3, pp. 1633–1634, 2009.
- [8] K. Purchala, L. Meeus, D. Van Dommelen, and R. Belmans, "Usefulness of DC Power Flow for Active Power Flow Analysis," *Power Eng. Soc. Gen. Meet.*, pp. 454–459, 2005.