

# Segmentkrümmer im Druckrohrleitungsbau

## Elastisches und plastisches Tragverhalten

A. Ecker, A. Lechner

Technische Universität Graz, Institut für Stahlbau, Lessingstraße 25/III, A-8010 Graz,  
AUSTRIA

E-Mail: [alexander.ecker@TUGraz.at](mailto:alexander.ecker@TUGraz.at)

### Kurzfassung

Im modernen Rohrleitungsbau von Wasserkraftanlagen werden Rohre mit sehr großem Durchmesser eingesetzt und ebenfalls Stahlgüten mit deutlich erhöhten Festigkeiten verwendet. Dies führt bei Richtungsänderungen der Leitung zur Frage der Auslegung der Segmentkrümmer, das heißt zur Frage der Gültigkeit der traditionellen analytischen Berechnungsformeln und der Frage der möglichen plastischen Ausnutzbarkeit des Stahlrohres. Die hier durchgeführten Untersuchungen umfassen elastische und plastische nichtlineare Berechnungen am freitragenden Segmentkrümmer (abgedeckeltes System) unter Innendruckbelastung mit Variation von Knickwinkeln und  $r/t$ -Verhältnissen. Es wird die Anwendbarkeit bzw. die Genauigkeit der bestehenden analytischen Berechnungsformeln auf Rohre mit großem Durchmesser untersucht. Als weiteres Ziel der Untersuchungen am Segmentkrümmer ist es herauszustellen, in wie fern durch plastische Berechnungen eine günstigere Auslegung der Wanddicken statthaft ist. Als Ergebnis werden Berechnungsformeln für die praktische Anwendung entwickelt und den numerischen Berechnungen am ideellen System gegenübergestellt.

### Einleitung

Als Segmentkrümmer wird ein Bauteil bezeichnet, welches sich aus zwei Zylindern mit gleichem Radius zusammensetzt, die unter einem bestimmten Knickwinkel  $\alpha$  aufeinandertreffen (Abbildung 1). Im Folgenden werden freitragende Segmentkrümmer, die ohne Ringversteifung am Knick ausgeführt werden, mit analytischen und numerischen Berechnungsmethoden untersucht. Untersucht werden Knickwinkel  $\alpha$  von  $7.5^\circ$  bis zu  $30^\circ$ .

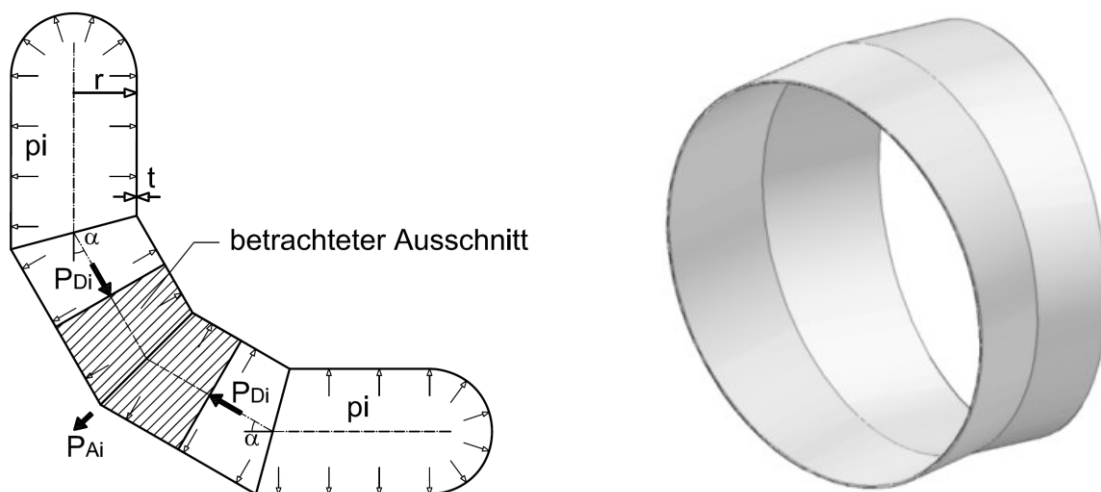


Abbildung 1: Segmentkrümmer

Die Segmentkrümmer werden in einem abgedeckelten System betrachtet, d. h. die

Deckeldruckkräfte  $P_{Di}$  sind voll wirksam und erzeugen eine Abtriebskraft  $P_{Ai}$  (Abbildung 1). Diese Abtriebskraft  $P_{Ai}$  steht mit den rücktreibenden Kräften im Rohr im Gleichgewicht. In den vorliegenden Untersuchungen wird der Segmentkrümmer ausschließlich mit dem Innendruck  $p_i$  belastet. Es handelt sich bei den untersuchten Krümmern um einen Ausschnitt eines zusammengesetzten Segmentkrümmers (Abbildung 1), wobei keine gegenseitige Beeinflussung benachbarter Segmentknicke besteht. Daher kann ein Einzelknick bei Ansatz mit entsprechenden Längsrandbedingungen als Ausschnitt separat betrachtet werden. Im Folgenden wird als Berechnungsbasis die Kesselformel für die analytische Berechnung eines geraden Rohrstücks herangezogen, da es sich um relativ dünnwandige Rohre handelt ( $50 < r/t < 200$ ) und Biege- und Radialspannungen werden vernachlässigt.

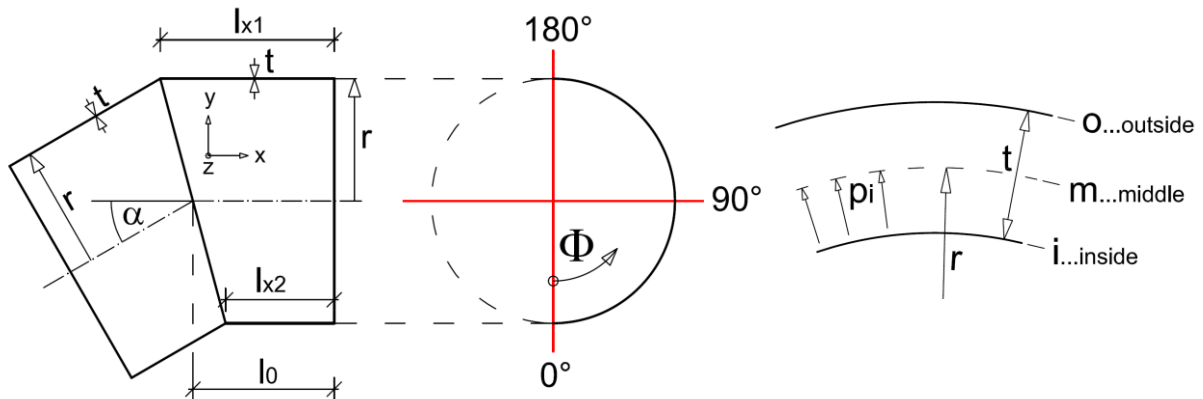


Abbildung 2: Winkeldefinition, Längen und Kürzel zur Beschreibung der Lage am Querschnitt

## Ausgangssituation der Untersuchungen – Stand der Technik

Die analytischen Lösungen zur Spannungsberechnung an der Verschneidungslinie der beiden Zylinderschalen eines Segmentkrümmers wurden in den 60er und 70er Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelt. Die unterschiedlichen analytischen Lösungen, die auch heute noch zum Stand der Technik gehören, werden im Folgenden von drei verschiedenen Autoren dargestellt. Diese sind in den Aufsätzen von Green/Emmerson (1960) [1], Wieser (1967) [2] und von Bond/Kitching (1970) [3] zu finden. Sie beziehen sich alle auf die Elastizitätstheorie und berücksichtigen keine plastischen Tragreserven.

### nach Green und Emmerson [1]:

In den nachfolgenden Formeln ist die Poissonziffer  $\nu = 0.3$  für Stahl bereits eingesetzt. Dadurch ergibt sich für die Spannungen in der Verschneidungslinie Folgendes:

Für die Umfangsmembranspannung  $\sigma_{u,m}$  gilt:

$$\sigma_{u,m} = \frac{pr}{t} * \left( 1 + 0.6427 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2) \cos\Phi \right) \quad (1)$$

Für die Umfangsspannungen  $\sigma_u$  inside (i) und outside (o) gilt (Abbildung 2):

$$\sigma_{u,i/o} = \frac{pr}{t} * \left( 1 + 0.6427 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2) \cos\Phi \mp 0.3501 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2) \cos\Phi \right) \quad (2)$$

Für die Längsmembranspannungen  $\sigma_{x,m}$  gilt:

$$\sigma_{x,m} = \frac{pr}{2t} \quad (3)$$

Für die Längsspannungen  $\sigma_x$  inside (i) und outside (o) gilt:

$$\sigma_{x,i/o} = \frac{pr}{t} * \left( \frac{1}{2} \mp 1.1669 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2) \cos\Phi \right) \quad (4)$$

Mit diesen Formeln lässt sich der Spannungsverlauf der Umfangs- und Längsspannungen am Querschnitt middle (m), inside (i) und outside (o) an der Verschneidungslinie bestimmen. Die maximalen Umfangsspannungen treten innenseitig des Knicks an der Außenseite des Rohres (outside) bei  $\Phi = 0^\circ$  auf.

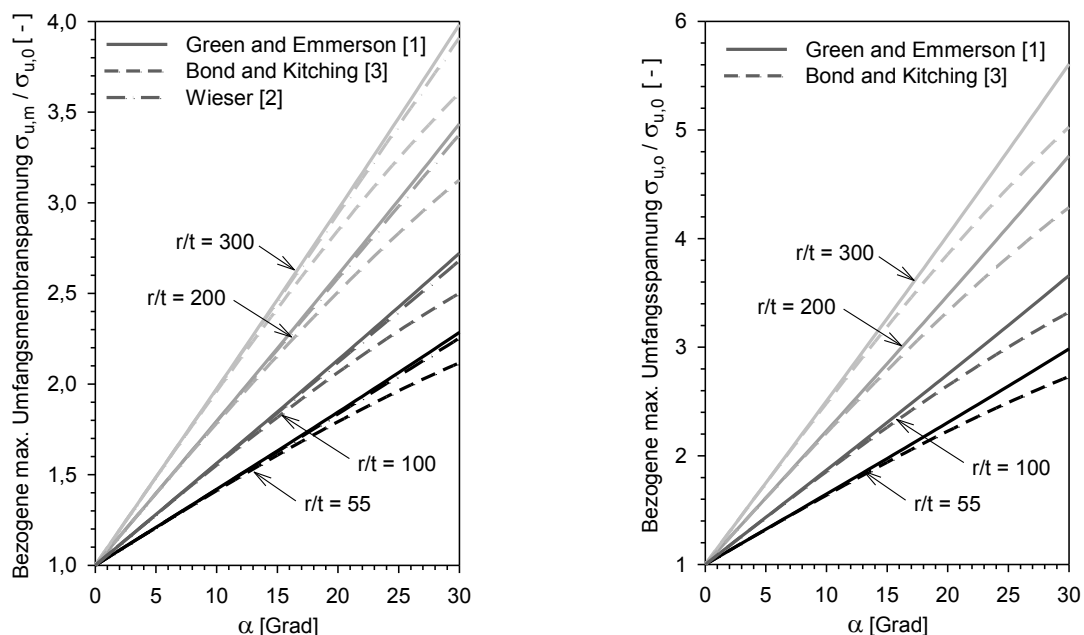
#### nach H. Wieser [2]:

Diese Formel stellt eine Vereinfachung ( $\tan \alpha/2 \approx \alpha/2[\text{rad}] = \pi/360 * \alpha[^\circ]$ ) der Berechnung der maximalen Umfangsmembranspannung von Green/Emmerson dar. Für die maximale Umfangsmembranspannung  $\sigma_{u,m,max}$  an der Innenseite des Knicks gilt:

$$\sigma_{u,m,max} = \frac{pr}{t} * \left( 1 + 0.0056 * \alpha[^\circ] * \sqrt{\frac{r}{t}} \right) \quad (5)$$

#### nach Bond und Kitching [3]:

Diese Autoren geben ebenfalls analytische Formeln an, mit denen die Umfangs- und Längsspannungen in der Verschneidungslinie berechnet werden können. Da die Formeln jedoch weit komplexere mathematische Zusammenhänge als die Formeln nach Green/Emmerson aufweisen und die Berechnungen der Spannungen nicht explizit ausgedrückt werden können, wird hier auf die Anführung dieser verzichtet. Der Autor E. C. Rodabaugh [4] fasst diese in seinem Aufsatz übersichtlich zusammen.



(a) Bezogene Umfangsmembranspannungen

(b) Bezogene max. Umfangsspannungen

Abbildung 3: Vergleich der analytischen Berechnungsformeln

#### Vergleich der analytischen Berechnungsformeln

Die Formeln dieser drei Autoren werden in Abbildung 3 verglichen. Hier sind bezogene Umfangsspannungen  $\sigma_u/\sigma_{u,0}$  in Abhängigkeit vom Knickwinkel  $\alpha$  und dem  $r/t$ -Verhältnis aufgetragen. Bezogene Spannungen sind Spannungen, die durch  $\sigma_{u,0} = p*r/t$  dividiert werden. Es zeigt sich aus Abbildung 3 (a), dass alle drei Formeln nahezu das gleiche Ergebnis für die

maximalen Umfangsmembranspannungen  $\sigma_{u,m}$  für Knickwinkel  $\alpha < 15^\circ$  liefern. Ab einem Knickwinkel größer als  $15^\circ$  tritt eine größere Abweichung in den Ergebnissen von Green/Emmerson, Wieser und Bond/Kitching auf. Je größer das  $r/t$ -Verhältnis ist, desto größer werden die bezogenen Umfangsspannungen bei gleichem Knickwinkel. Dasselbe gilt für die maximale Umfangsspannung am Querschnitt outside  $\sigma_{u,o}$  (Abbildung 3 b). Der Autor H. Wieser gibt für diese Spannungen keine Berechnungsformeln an. Die anschließenden numerischen Berechnungen werden mit der analytischen Lösung von Green/Emmerson verglichen und der Gültigkeitsbereich dieser ermittelt, da sie einerseits bei größeren Knickwinkeln „konservativer“ ist und andererseits um ein vielfaches einfacher handzuhaben ist, als die Formeln von Bond/Kitching.

### **Vorschlag für Bemessungsformel unter Berücksichtigung der plastischen Tragfähigkeit**

Ein Ansatz, um die plastische Tragfähigkeit des Rohres auszunutzen, wurde in der Baupraxis der Weg beschritten die Umfangsmembranspannung nach der Formel (1) von Green/Emmerson zu modifizieren. Es wird der Faktor 0.6427 in der Formel (1) auf 0.4 reduziert, um die lokale plastische Umlagerung am Segmentknick zu erfassen. Damit ergibt sich für die maximale Umfangsmembranspannung, welche für den Nachweis der Primärspannungen maßgebend ist, folgender Ansatz:

$$\sigma_{u,m,max} = \frac{pr}{t} * \left( 1 + 0.4 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2) \right) \quad (6)$$

Ob dieser Ansatz zutreffend ist und er die plastische Tragreserve realitätsnahe widerspiegelt, wird mit einer numerischen Berechnung für einen bestimmten Parameterbereich untersucht.

## **Elastisches Verhalten des Segmentkrümmers**

In diesem Abschnitt wird auf die numerischen Untersuchungen bei elastischem Tragverhalten eingegangen.

Exemplarisch wird hier das elastische Verhalten eines Segmentkrümmers mit einem Knickwinkel  $\alpha = 7.5^\circ$ , einem Radius  $r = 2170.5$  mm und einer Wanddicke  $t = 39$  mm dargestellt ( $r/t = 55$ ). Der Innendruck  $p_i$  beträgt  $5.788$  N/mm<sup>2</sup>. Die Deckeldruckkräfte werden am Rohrende als Kraft angesetzt (siehe Abbildung 5 Fall (1)). Die Länge des Rohrstücks ist  $l_0 = 1300$  mm. Der E-Modul des Stahls beträgt  $210000$  N/mm<sup>2</sup> und  $\nu = 0.3$ . In der Abbildung 4 (a) ist die Längsspannung  $\sigma_x$  um den halben Umfang des Rohres dargestellt. Die Innenseite des Knicks befindet sich bei  $\Phi = 0^\circ$ . In Grau mit den Kürzel „a.“ ist die analytische Lösung nach Green/Emmerson eingetragen. In Schwarz mit dem Kürzel „n.“ ist die numerische Berechnung (GNA... geometrisch nichtlineare elastische Berechnung) bezeichnet. Es zeigt sich eine überaus gute Übereinstimmung zwischen der numerischen und der analytischen Berechnung. Dasselbe gilt für die Abbildung 4 (c), welche die Umfangsspannungen  $\sigma_u$  darstellt.

Es zeigt sich, dass durch den Knick Biegespannungen in den Längs- und Umfangsspannungen entstehen. Zusätzlich erhöht sich die Umfangsmembranspannung  $\sigma_{u,m}$  an der Innenseite des Knicks. Die Längsmembranspannung  $\sigma_{x,m}$  bleibt jedoch über den Umfang konstant. Die Abbildung 4 (b) und (d) zeigen das Abklingen der Biegespannungen der Längs- und Umfangsspannungen und die Erhöhung der Umfangsspannungen  $\sigma_u$  durch den Segmentknick entlang der Rohrlängsrichtung bei  $\Phi = 0^\circ$ . Bei einer Länge von  $2.5 * \sqrt{r * t}$  sind die Biegespannungen der Längs- und Umfangsspannungen und die erhöhten Umfangsspannungen fast zur Gänze abgeklungen. Nach dieser Abklinglänge können die Spannungen im Rohr nach der Kesselformel berechnet werden.

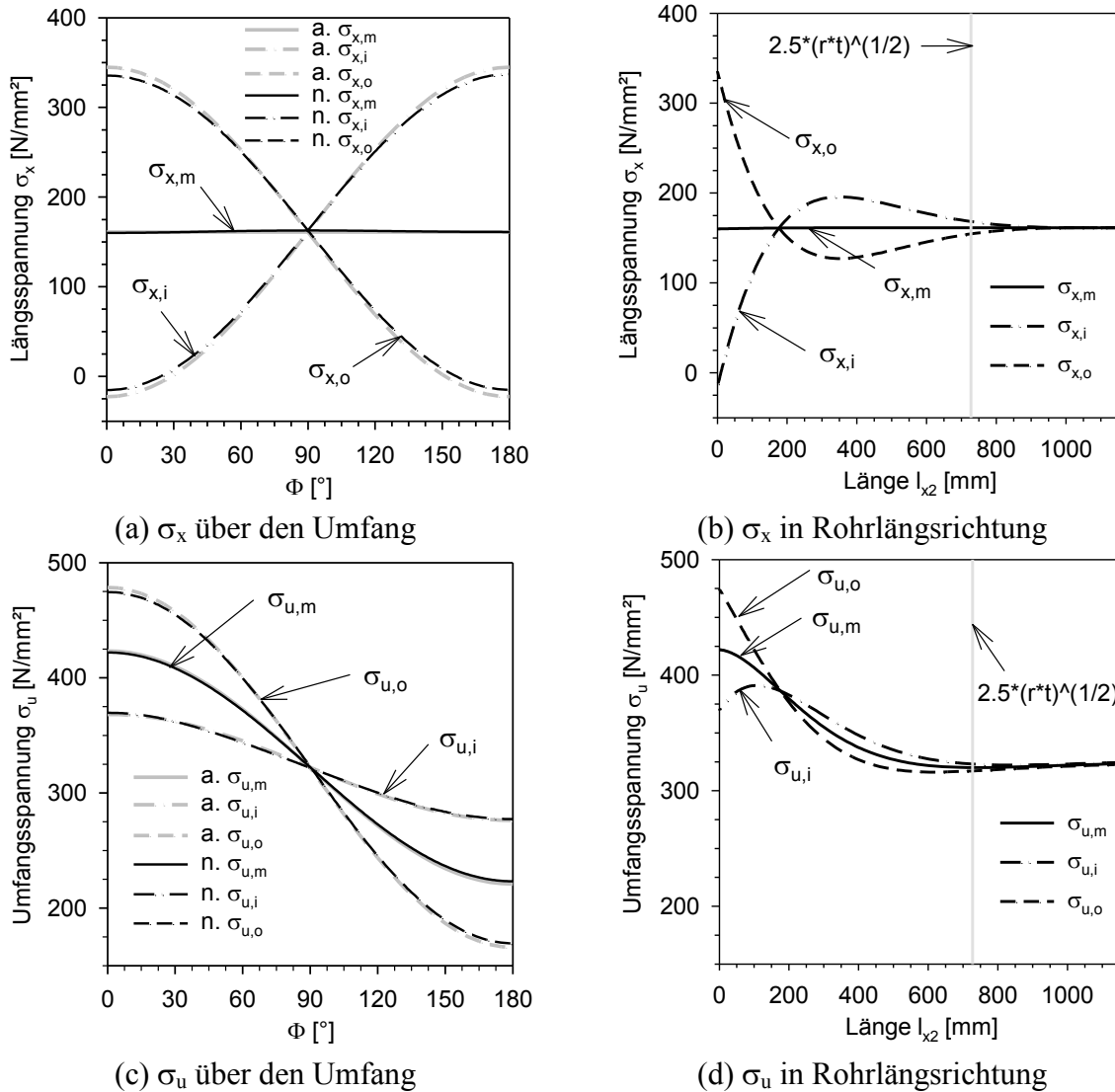
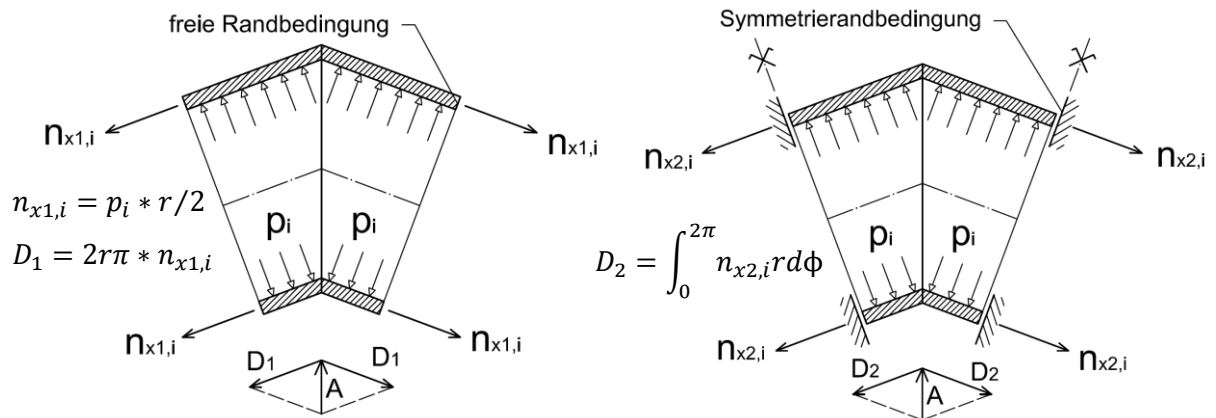


Abbildung 4: Elastische Spannungsverteilungen,  $\alpha = 7.5^\circ$ ,  $r/t = 55$

### Parameterstudie zum elast. Tragverhalten und Vergleich mit der analyt. Berechnung

Der untersuchte Parameterbereich umfasst drei verschiedene  $r/t$ -Verhältnisse ( $r/t = 55$ ,  $r/t = 100$ ,  $r/t = 200$ ) und drei unterschiedliche Knickwinkel ( $\alpha = 7.5^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ). Diese Fälle werden mit zwei verschiedenen Längsrandbedingungen am Ende des Rohres untersucht. Im Fall (1) der Abbildung 5 besitzt das Rohr am Ende eine freie Randbedingung und die Deckeldruckkraft wird als äußere Belastung konstant über den Umfang verteilt aufgebracht. Im Fall (2) der Abbildung 5 wird das Rohr in Längsrichtung gehalten und die Deckeldruckkraft im Rohr wird durch eine Randbedingung erzeugt. Diese Randbedingung entspricht einer Symmetrieebene am Rohrende. Um einen Segmentkrümmer in einem abgedeckelten System zu simulieren, kommen nur diese beiden untersuchten Randbedingungen in Frage. Der Vergleich der einzelnen numerischen Berechnungen mit der analytischen Formel nach Green/Emmerson wird über den Vorfaktor  $f_m$  vor dem Erhöhungsterm ausgedrückt. Die maximalen numerischen Umfangsmembranspannungen (Primärspannungen)  $\sigma_{u,m,num.}$  errechnen sich analog zur Formel (1) mit Hilfe des Faktors  $f_m$  zu:

$$\sigma_{u,m,num.} = \frac{pr}{t} * \left( 1 + f_m * 0.6427 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2) \right) \quad (7)$$



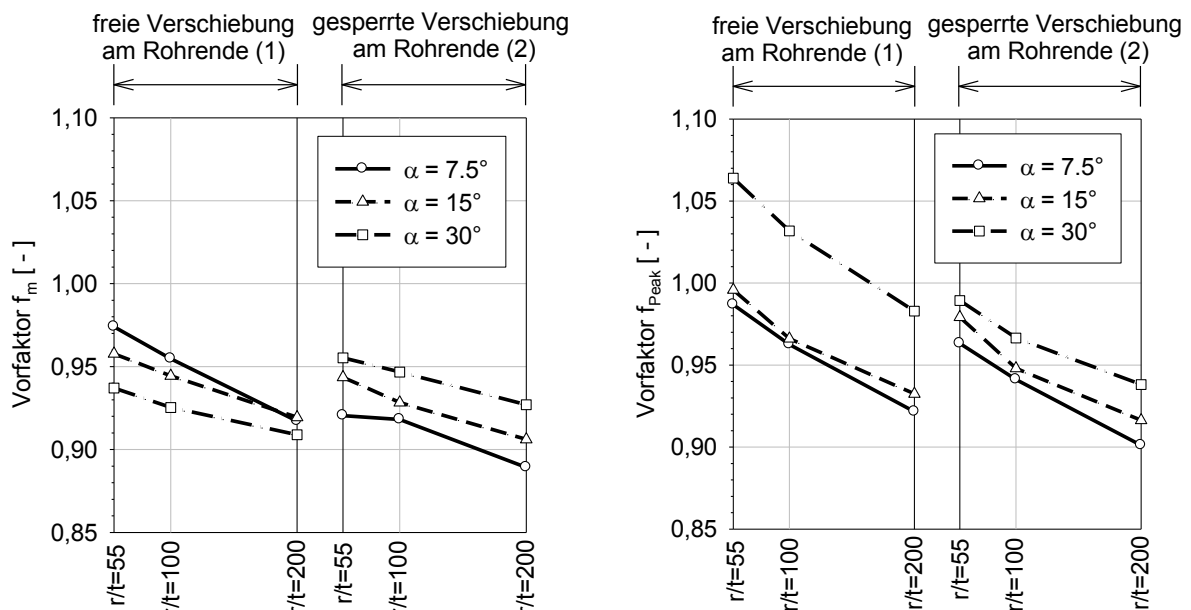
(1) freie Verschiebung in Längsrichtung      (2) gesperrte Verschiebung in Längsrichtung

Abbildung 5: unterschiedliche Rohrlängsrandbedingungen

Diese Vorfaktoren  $f_m$  sind für den untersuchten Parameterbereich in der in der Abbildung 6 (a) dargestellt. Die maximalen numerischen Umfangsspannungen am Querschnitt outside (Primärspannungen + Sekundärspannungen) errechnen sich analog zur Formel (2) zu:

$$\sigma_{u,o,num.} = \frac{pr}{t} * \left( 1 + f_{Peak} * 0.9928 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2) \right) \quad (8)$$

Diese Vorfaktoren  $f_{Peak}$  sind in der Abbildung 6 (b) dargestellt.



(a) Umfangsmembranspannungen  $\sigma_{u,m,num.}$

(b) Umfangsspannungen outside  $\sigma_{u,o,num.}$

Abbildung 6: Vorfaktoren  $f_m$  und  $f_{Peak}$  für das elastische Verhalten der Parameterstudie

Abbildung 6 zeigt, dass eine sehr gute Übereinstimmung der numerischen mit der analytischen Berechnung vorhanden ist (Vorfaktoren von 0.89 – 1.06) und dass die unterschiedlichen Randbedingungen ebenfalls nahezu gleiche Ergebnisse liefern.

## Plastisches Tragverhalten des Segmentkrümmers

Im Rohrleitungsbau kann das plastische Tragvermögen des Stahls im Allgemeinen für den

Nachweis der Primärspannungen ausgenutzt werden. In diesem Kapitel soll geklärt werden, ob der Segmentkrümmer plastische Tragreserven besitzt und ob die oben vorgeschlagene Bemessungsformel (6) zutreffend ist. Das plastische Tragvermögen wird mit Hilfe eines Laststeigerungsfaktors (LPF) bezogen auf die Mises-Vergleichsspannung (Formel (9)) ausgedrückt. Der Innendruck, auf den sich der Laststeigerungsfaktor (LPF) der plastischen Berechnung bezieht, errechnet sich aus folgenden Beziehungen: Aus der Formel (6) und der Formel (3) wird die Mises-Vergleichsspannung (Formel (9)) gebildet. Dies ist als ein vereinfachter Ansatz zu sehen, da die Längsmembranspannung nur bei teilplastischen Zuständen -welche bemessungsbestimmend sind- nahezu konstant bleibt und nach Formel (3) berechnet werden kann.

$$\sigma_{v,m,k} = \frac{pr}{t} \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 + 0.4 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2)\right)^2} - \frac{1}{2} \left(1 + 0.4 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2)\right) \quad (9)$$

Im Sicherheitskonzept laut C.E.C.T [5] muss folgender Nachweis der Primärspannungen eingehalten werden:

$$\sigma_{v,m,k} \leq \frac{f_y}{c'} \quad (10)$$

$c' = 1.5$  ... Sicherheitsfaktor für freitragende Rohrleitungen im Primärspannungsnachweis  
Dies führt zu:

$$\max. \sigma_{v,m,k} \equiv \frac{f_y}{c'} = \frac{f_y}{1.5} \quad (11)$$

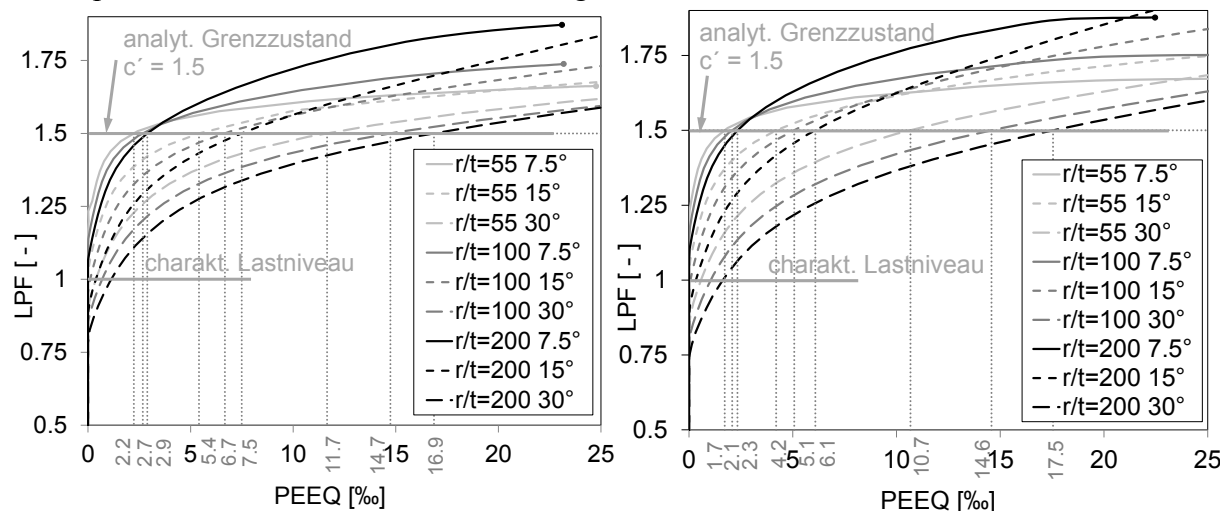
Aus dieser Bedingung errechnet sich der Referenz-Innendruck, welcher der plastischen Berechnung zugrunde gelegt wird, zu:

$$p_i = \frac{f_y * t}{c' * r * \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 + 0.4 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2)\right)^2} - \frac{1}{2} \left(1 + 0.4 * \sqrt{\frac{r}{t}} * \tan(\alpha/2)\right)} \quad (12)$$

Dieser Innendruck berücksichtigt nun die vorgeschlagene Bemessungsformel (6), die Ausnutzung der Mises-Vergleichsspannung und den Sicherheitsbeiwert laut C.E.C.T.

### Parameterstudie zum plastischen Tragverhalten

In der plastischen Parameterstudie wird der gleiche Parameterbereich, wie bei der elastischen



(a) freie Verschiebung am Rohrende

(b) gesperrte Verschiebung am Rohrende

Abbildung 7: Parameterstudie – plastische Dehnungen in Abhängigkeit des LPF

Berechnung untersucht. Die Arbeitslinie des Stahls wird mit einem ideal-plastischen Materialgesetz definiert (Die Fließgrenze  $f_y$  des Stahls beträgt  $440 \text{ N/mm}^2$  und der E-Modul beträgt  $210000 \text{ N/mm}^2$ ). In Abbildung 7 ist der Laststeigerungsfaktor (LPF) in Abhängigkeit der maximalen äquivalenten plastischen Dehnungen (PEEQ am Querschnitt „outside“, äquivalent zur Mises-Vergleichsspannung) aufgetragen. Abbildung 7 (a) stellt die PEEQ für die Längsrandbedingung mit freier Verschiebung am Rohrende dar (siehe Abbildung 5). Abbildung 7 (b) stellt diese für die gesperrte Verschiebung am Rohrende dar. Es zeigt sich, dass beide Ergebnisse nahezu ident sind. LPF = 1.0 stellt den Dehnungszustand für das charakteristische Lastniveau dar. LPF = 1.5 beschreibt das maximale analytische Bemessungslastniveau. Es bestätigt sich die Bemessungsformel (6) mit Ausnutzung der Mises-Vergleichsspannung nach Formel (9) dadurch, dass sowohl alle numerischen Traglasten höher als der analytische Grenzzustand sind, als auch deren plastische Dehnungen PEEQ auf Niveau des analytischen Grenzzustand maximal 17.5 ‰ erreichen und in vertretbarer Größenordnung liegen ( $\epsilon_{\text{peeq,max}} \sim 8 \cdot \epsilon_y$ ).

## Zusammenfassung

Der freitragende Segmentkrümmer wurde numerisch mit einem elastischen Materialgesetz berechnet und anschließend mit der analytischen Berechnung nach Green/Emmerson [2] für verschiedene Abmessungen anhand einer Parameterstudie verglichen. Es hat sich gezeigt, dass sich für die untersuchten Fälle die Erhöhungen der Umfangsmembranspannung  $\sigma_{u,m}$  (Primärspannungen) und der maximalen Umfangsspannung an der Außenseite des Rohres  $\sigma_{u,o}$  (Primärspannungen + Sekundärspannungen) im ungünstigsten Falle mit einer Abweichung von +6% bzw. -10% zur numerischen Berechnung bestimmen lassen. Dies kann für praktische Zwecke als ausreichend angesehen werden. Ebenso wurde die plastische Tragfähigkeit des freitragenden Segmentkrümmers mit denselben Abmessungsverhältnissen, wie in der elastischen Berechnung, untersucht. Die numerische Berechnung zeigt, dass der Segmentkrümmer durchaus plastische Tragreserven besitzt. Diese können mit einer modifizierten analytischen Berechnung nach Green/Emmerson (Formel 6), welche die maximalen Umfangsmembranspannungen gegenüber der elastischen Berechnung reduziert, mit ausreichender Genauigkeit berücksichtigt werden. Diese plastischen Tragreserven dürfen üblicherweise für den Spannungsnachweis der Primärspannungen herangezogen werden. Diese Ergebnisse, sowohl bei elastischem als auch plastischem Tragverhalten erlauben daher, die Berechnung von Segmentkrümmern unterschiedlicher Abmessungen mit hoher Genauigkeit mittels einfacher Berechnungsformeln durchführen zu können. Es ist damit eine wesentliche Fragestellung bei der Auslegung von freitragenden Segmentkrümmer-Bereichen im Druckrohrleitungsbau beantwortet worden.

## Quellenverzeichnis

- [1] A. E. Green, W. C. Emmerson, Stresses in a pipe with a discontinuous bend, J. Mechs. Phys. Solids, 1961, Vol. 9, S. 91- 104.
- [2] H. Wieser, Spannungsspitzen von Segmentkrümmern, Österreichische Ingenieur-Zeitschrift, 1967, 11. Jahrgang, Heft 1, S. 6-7
- [3] M. P. Bond, R. Kitching, Multi- mitred and single- mitred bends subjected to internal pressure, Int. J. mech. Sci, 1971, Vol. 13, S. 471-488.
- [4] E. C. Rodabaugh, Review of data on mitre joints in piping to establish maximum angularity for fabrication of girth butt welds, WRC Bulletin 208, 1975, S. 1-22.
- [5] C.E.C.T, Comite Europeen de la Chaudronnerie et de la Tolerie; Recommendations for the Design, Manufacture an Erection of steel penstocks of welded Construction for Hydro Electric Installations; Janvier: s.n., 1979.